ENSINO DE MATEMÁTICA E CIÊNCIAS:

temas para reflexão

ORGANIZADORES:
RAFAEL PREARO LIMA
RODRIGO RAFAEL GOMES
RUBENS PANTANO FILHO

FoxTablet

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

Câmpus
Bragança Paulista

SEMAT
11ª Semana de Matemática
e Educação Matemática
Câmpus Bragança Paulista

Ensino de Matemática e Ciências: temas para reflexão

Organizadores

Rafael Prearo Lima

Rodrigo Rafael Gomes

Rubens Pantano Filho

2022

Título: Ensino de Matemática e Ciências – temas para reflexão

Autores: vários

Organizadores: Rafael Prearo Lima / Rodrigo Rafael Gomes / Rubens Pantano Filho

Imagem da capa: Armando Olivo Martin del Campo. **Monumento ao Filósofo Giordano Bruno**, 2020. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Giordano_Bruno_Monumento.jpg. Acessado em: 02 abr. 2022.

FICHA CATALOGRÁFICA

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

E59 Ensino de Matemática e Ciências [livro eletrônico] : temas para reflexão / Organizadores Rafael Prearo Lima, Rodrigo Rafael Gomes, Rubens Pantano Filho. – Salto, SP: FoxTablet, 2022.
120 p. : il.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-89010-51-7

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Ciências – Estudo e ensino. 3. Professores – Formação. I. Lima, Rafael Prearo. II. Gomes, Rodrigo Rafael. III. Pantano Filho, Rubens.

CDD 370.71

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Índices para catálogos sistemáticos:

Rua Toscana, 176 – Bairro Vila Romana – Salto/SP – CEP 13321-440
Tel. (11) 3413-3998 / Cel. (11) 98689-1789

Sumário

Apresentação

Dentre os diversos eventos que sedia, o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP campus Bragança Paulista – organiza anualmente a Semana da Matemática e Educação Matemática (SEMAT). O evento, dirigido não apenas a estudantes de Licenciatura em Matemática e a professores dessa área, como também a quaisquer interessados, tem como objetivo proporcionar o enriquecimento acadêmico tanto do futuro professor, quanto do professor atuante na Educação Básica.

Em sua programação, a SEMAT oferece oficinas, palestras, espaços para discussões e debates sobre ensino de Matemática e de Ciências, além de contar com uma Feira de Matemática e com seções para apresentação de trabalhos acadêmicos. Professores e estudantes podem submeter trabalhos que, tendo sido aprovados, contarão com a publicação em anais eletrônicos.

A exemplo dos anos anteriores, a XI SEMAT, realizada entre os dias 4 e 6 de maio de 2022, contempla o público participante com esta publicação que ora apresentamos, abordando o seguinte tema base: **“Ensino de Matemática e Ciências: temas para reflexão”**. A obra é uma coletânea com trabalhos referentes a estudos, reflexões e relatos de práticas de sala de aula, todos de autoria de professores/pesquisadores do IFSP campus Bragança Paulista, bem como de docentes convidados de outras instituições de ensino e pesquisa.

A divulgação desses estudos, reflexões e práticas do dia a dia acadêmico e profissional é uma oportunidade para que os autores compartilhem, por meio dos trabalhos aqui publicados, suas práticas acadêmicas, estabelecendo, assim, a promoção de outras ideias, análises e discussões. Esperamos, pois, que as reflexões aqui apresentadas contribuam para o aperfeiçoamento do trabalho docente, tanto em relação aos profissionais que já atuam na área da Educação, quanto àqueles se preparando para isso, melhorando, desse modo, sua atuação como educadores/formadores em suas unidades de ensino.

Rafael Prearo-Lima

Rodrigo Rafael Gomes

Rubens Pantano Filho

A Marquesa de Châtelet: uma filósofa natural do século XVIII

Roberto de Andrade Martins[1]

Introdução

Este trabalho apresenta uma visão geral sobre a vida e a obra da Marquesa de Châtelet.

Gabrielle Émilie Le Tonnelier de Breteuil, a Marquesa de Châtelet (1706-1749), foi uma importante filósofa natural francesa do século XVIII. Quando criança, teve uma educação excepcional e ampla. Depois de se casar e de ter três filhos, dedicou-se aos estudos, principalmente à matemática e à filosofia natural. Conheceu o filósofo Voltaire, com quem iniciou um relacionamento a partir de 1733. Viveram juntos no palácio de Cirey durante muitos anos, embora ela permanecesse casada com o Marquês de Châtelet. Voltaire e a Marquesa colaboraram na elaboração de obras sobre o pensamento de Newton, que nessa época ainda era pouco aceito na França. Em 1740, publicou seu livro *Institutions de Physique*, que teve grande repercussão. Envolveu-se em controvérsias a respeito dos fundamentos da mecânica e depois começou a traduzir para o francês e comentar os *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* de Newton. Em 1748, apaixonou-se pelo poeta Saint-Lambert e ficou grávida. Temendo falecer por ocasião do parto, intensificou o trabalho de tradução da obra de Newton. Como havia temido, uma semana depois do nascimento de sua filha, a Marquesa faleceu, aos 42 anos de idade. Sua tradução comentada dos “Principia” foi publicada, postumamente, por seu amigo Clairaut.

---

[1] Doutor em Lógica e Filosofia da Ciência. Livre-Docente em Física Geral. PECMA, Universidade Federal de São Paulo (Unifesp). *E-mail*: roberto.andrade.martins@gmail.com

A parte da vida de Émilie de Châtelet mais produtiva, sob o ponto de vista intelectual, foi o período de quinze anos de seu relacionamento com Voltaire. É impossível compreender a obra da Marquesa sem mencionar também a trajetória de Voltaire, até o falecimento de Émilie. Por isso, este artigo também apresenta alguns aspectos da vida e da obra desse pensador, até 1749.

Dada a extensão deste trabalho, não será apresentada uma discussão detalhada sobre os trabalhos da Marquesa de Châtelet. Também não foi viável introduzir o grande número de referências bibliográficas consultadas. Pessoas interessadas em aprofundar o conhecimento sobre a vida de Émilie de Châtelet devem consultar livros como os de Elisabeth Badinter (1983) e de Judith Zinsser (2006). Sobre a colaboração intelectual entre Voltaire e Émilie, recomendo o estudo do livro de Ira Owen Wade (1941). Quem quiser se aprofundar em detalhes da vida e da obra de Émilie de Châtelet deve consultar a bibliografia detalhada publicada por Ana Rodrigues (2012).

Émilie

Gabrielle Émilie Le Tonnelier de Breteuil (geralmente chamada Émilie e não Gabrielle) nasceu em Paris no dia 17 de dezembro de 1706. Seu pai foi Louis Nicolas Le Tonnelier, Barão de Breteuil (1648-1728). Na corte do rei Luís XIV, ele tinha o papel de "oficial introdutor dos embaixadores", algo parecido com um ministro das relações exteriores. Era uma pessoa que sabia se comunicar em vários idiomas. Sua mãe, Gabrielle-Anne de Froulay, foi educada em um convento e tinha uma sólida cultura. O irmão mais velho de Émilie, chamado Charles-Auguste (1701-1731), tornou-se depois o Barão de Preuilly. Seu irmão mais novo, Élisabeth-Théodose (1712-1781), seguiu carreira eclesiástica e depois passou a ser conhecido como o Abade de Breteuil.

Há pouquíssimas informações seguras a respeito da infância e da educação de Émilie. Talvez ela tenha passado algum tempo frequentando um convento de freiras, como sua mãe. Seus dois irmãos foram educados em casa, por tutores, como acontecia na época com os meninos da nobreza. Pode ser que Émilie tenha também recebido lições dos mesmos tutores, como sugere Judith Zinsser (2006). Talvez seu pai pretendesse que o filho mais velho seguisse sua carreira diplomática e, por isso, poderia ter tido tutores que lhe ensinassem vários idiomas modernos. Tendo isso acontecido ou não, Émilie aprendeu, quando criança, a ler em alemão e italiano. Posteriormente, aprendeu inglês em poucas semanas. O seu irmão mais novo, Théodose, estava desde cedo destinado a uma vida eclesiástica e provavelmente teve tutores que lhe ensinaram latim e grego – idiomas que Émilie também aprendeu, antes dos 13 anos de idade. Para se tornar uma dama da alta sociedade parisiense, sua educação incluiu a literatura, o teatro, a dança, o canto e a música (ela tocava cravo). Provavelmente imitando seus irmãos, ela também se dedicou à ginástica e aprendeu a montar a cavalo. Durante a adolescência, começou a colecionar roupas, sapatos e joias – um hábito que manteve durante toda a vida.

O pai de Émilie costumava receber na residência da família não apenas outros nobres, mas também literatos e pensadores. Uma das pessoas que frequentava o salão familiar foi Bernard Le Bouyer de Fontenelle (1657-1757), um importante filósofo natural da época. O próprio Voltaire também pertencia ao círculo literário da família, e Émilie provavelmente o conheceu quando adolescente. Esses contatos culturais certamente a influenciaram. Não se sabe, no entanto, por qual motivo ela começou a se interessar muito especialmente por matemática e física (ou filosofia natural, como era chamada na época).

Aos dezesseis anos, seu pai a apresentou à corte, como se costumava fazer na época. Ela começou a frequentar a nobreza e sua família passou a planejar seu casamento. Aos 18 anos de idade, no dia 20 de junho de 1725, ela se casou com o Marquês Florent-Claude du Chastellet (1695-1765), doze anos mais velho do que ela. O casamento era conveniente para as duas famílias, beneficiando o Marquês (de uma família nobre antiga, mas não muito rica) e a família de Émilie (pois a associação com a nobreza antiga facilitaria a carreira dos filhos). Provavelmente Émilie encontrou o marido, pela primeira vez, no dia do casamento, como era comum nessa época. A partir de então, ela se tornou a Marquesa de Chastellet – passando a ser chamada depois “Marquesa de Châtelet” por influência de Voltaire, embora ela própria utilizasse a grafia “Chastellet” em suas publicações e documentos. O casal passou a viver na pequena cidade chamada Semur-en-Auxois, na Borgonha, onde o Marquês era governador. Durante alguns anos, Émilie cumpriu seu papel de esposa, produzindo também os esperados descendentes. O casal teve três filhos – uma menina e dois meninos. A filha mais velha, Françoise Gabrielle Pauline, nasceu um ano depois do casamento, em junho de 1726. O primeiro filho, Louis Marie Florent, nasceu em novembro do ano seguinte. O segundo filho, Victor Esprit, nasceu em abril de 1733, porém faleceu com menos de dois anos de idade. O Marquês de Chastellet se ausentava frequentemente, por longo tempo, por causa de seus encargos militares; a Marquesa assumia também os encargos práticos associados às finanças da família, às vezes viajando para cuidar desses interesses. Numa dessas ocasiões, em Bruxelas, ela se apaixonou pelo encarregado de negócios da família.

Nos casamentos realizados por interesses familiares, como foi o caso, não se esperava que houvesse um profundo amor nem fidelidade entre os cônjuges. Tratava-se apenas de um acordo social, útil para os dois lados. Era comum nessa época, na aristocracia, que tanto o marido quanto a esposa mantivessem ligações amorosas fora do casamento. Apesar de seu envolvimento com outros homens, Émilie manteve uma amizade e um bom relacionamento com o seu marido até a morte.

São conhecidos seis amantes de Émilie de Châtelet. Em 1728, surgiu o primeiro deles, Joseph-Marie Budes (1701-1760), Conde de Guébriand. Foi uma paixão arrasadora. Na época Émilie tinha 21 anos e, quando ele rompeu o relacionamento, ela tentou se matar. Em seguida, três casos passageiros sem grandes consequências – o de Bruxelas, já mencionado; depois, em Paris, com Louis-François-Armand de Vignerot du Plessis (1696-1688), Duque de Richelieu; e com Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), que foi seu professor de matemática. O quinto amante foi Voltaire, sobre quem falaremos em seguida, uma ligação que durou quinze anos. O último foi o poeta Jean-François de Saint-

Lambert (1716-1803), Marquês de Saint-Lambert, com quem teve uma filha – um evento que será também relatado posteriormente.

Figura 1 - Gravura do século XVIII representando a Marquesa de Châtelet, por Louis-Simon Lempereur, a partir de desenho de Charles Monnet. Crédito: Musée Carnavalet.

Fonte: lookandlearn.com, ref. YP0621301.

Com tantos amantes, surge a pergunta: ela era muito bonita? As opiniões, na época, se dividiam (ver Fig. 1). Maupertuis e Voltaire elogiavam sua beleza. Por outro lado, há indícios de que ela não era tão atraente assim. Marie Anne de Vichy-Chamrond (1696-1780), Marquesa du Deffand, que não gostava dela, assim a descreveu: "Imagine uma mulher alta e seca, sem traseiro, sem quadris, peito estreito, duas tetas pequenas vindas de muito longe, braços grandes, pernas grandes, pés enormes, cabeça muito pequena, rosto agudo, nariz pontudo, dois pequenos olhos verdes como o mar, pele escura e avermelhada, boca achatada, dentes separados, e extremamente mimada". Pelo menos parte dessa descrição é correta. Émilie era alta, para os padrões da época – mais de 1,62 m. A estrutura de seu corpo parece corresponder ao relato de Madame du Deffand – membros grandes e o tronco mais masculino do que era desejado na época. Talvez incomodada com seu corpo, Émilie só aparecia em público muito enfeitada e maquiada, com joias e roupas que chamavam a atenção.

Com a morte do rei Augusto II da Polônia, começou em 1733 uma guerra pela sucessão do trono, que durou até 1738. O Marquês de Chastellet participou da guerra e, logo que o conflito estava para se iniciar, Émilie deixou Semur-em-Auxois e se mudou para Paris. Começou então uma nova fase de sua vida, dedicando-se tanto às atividades sociais da aristocracia quanto aos estudos de matemática e de filosofia natural. É necessário agora fazer uma pausa na descrição biográfica de Émilie de Châtelet e apresentar algumas informações sobre Voltaire.

Voltaire

François-Maria Arouet (1694-1778), conhecido por seu nome literário "Voltaire", foi uma das figuras intelectuais de maior destaque no século XVIII, dedicando-se à literatura, à filosofia, à história, à política, à religião e às ciências. Durante sua adolescência, foi educado em um colégio de padres jesuítas e, ao terminar esses estudos, tinha o desejo de se tornar escritor – contrariando a vontade de seu pai, que queria torná-lo um advogado. Em Paris, onde passou a maior parte de sua juventude, escreveu poemas e peças de teatro e criticou personalidades importantes, como o Duque de Orléans, escrevendo também versos satíricos contra o Regente e sua filha, o que levou à prisão, na Bastilha (1717-1718). Quando preso, continuou a escrever e decidiu adotar o nome "Voltaire". Pouco depois de ser solto, a

Comédie Française encenou em 1718 sua primeira peça teatral, *Oedipe*, que teve enorme sucesso. Outras de suas obras, nos anos seguintes, tiveram resultados variados.

Após um confronto com um nobre, Guy Auguste de Rohan-Chabot (1683-1760), Visconde de Bignan, no início de 1726, Voltaire foi novamente preso na Bastilha, sem ser julgado. Foi liberado com a condição de sair da França. Escolheu ir para a Inglaterra, tendo obtido autorização para isso. Em maio do mesmo ano, embarcou para a Inglaterra, onde permaneceu até o final de 1728. Esse período de dois anos e meio na Inglaterra foi de grande importância para o desenvolvimento de seus interesses políticos, filosóficos e científicos. Começou a estudar as ideias de Isaac Newton (que faleceu em março de 1727) e entrou em contato com Catherine Conduitt, sobrinha de Newton, e com Samuel Clarke, que representou Newton no famoso debate com Leibniz, cujo pensamento filosófico o influenciou. Durante o período na Inglaterra, publicou duas obras em inglês, uma sobre a história da França e outro sobre literatura épica de Homero até Milton.

Ao retornar à França, Voltaire foi inicialmente proibido de visitar Paris. Enquanto aguardava a mudança de situação, continuava a escrever. Uma de suas novas peças de teatro, chamada *Zaïre*, fez grande sucesso, em 1732.

A família de Voltaire pertencia à baixa nobreza, ainda que seu pai e seu irmão mais velho tivessem boa posição financeira. Voltaire tinha algumas economias, que investiu em uma loteria do governo, em parceria com o pesquisador Charles Marie de La Condamine (1701-1774), que descobriu um modo de ganhar infalivelmente por causa de erros de planejamento dessa loteria. Eles e seus parceiros no empreendimento obtiveram lucros imensos. Depois, aplicou esse dinheiro em ações emitidas pelo duque François III de Lorena, obtendo também grande lucro nessa operação. Em seguida, investiu seus recursos em atividades de comércio nacional e internacional, utilizando os serviços financeiros dos irmãos Pâris, tornando-se rico e independente, a partir do início da década de 1730. Foi nesse período que Voltaire iniciou seu relacionamento com Émilie de Châtelet.

Paralelamente à sua atividade literária, redigiu, depois do retorno da Inglaterra, suas "Cartas filosóficas", que foram publicadas primeiramente na Inglaterra, em inglês, em 1733, com o título *Letters concerning the English nation*. As 24 "cartas" abordavam temas como a religião, a filosofia, a literatura, as ciências, as artes, a política. Nessa obra, Voltaire apresentou de forma elogiosa vários aspectos da cultura inglesa, desmerecendo os aspectos correspondentes da França. Dos 24 ensaios que constituem o livro em sua versão original, vários estão diretamente relacionados ao pensamento científico, sobre Francis Bacon (carta 12), Locke (13), Descartes e Newton (14), gravitação (15), óptica de Newton (16), geometria e cálculo (17) e sobre a *Royal Society* (24). A versão francesa da obra foi publicada no ano seguinte, com o título *Lettres écrites de Londres sur les anglois et autres sujets* (1734), à qual adicionou um novo capítulo, sobre a filosofia de Pascal. Até essa época, o pensamento newtoniano era pouco conhecido e tinha baixíssima aceitação na França; o trabalho de Voltaire procurava divulgar essas ideias, além de tratar sobre diversos outros temas. O livro produziu um escândalo, por causa de suas considerações negativas em relação à França e elogios à Inglaterra. Foi proibido e queimado em público, obrigando Voltaire a fugir novamente de Paris. Posteriormente, foi reeditado com o título mais neutro de *Lettres philosophiques.*

Émilie e Voltaire

Quando se mudou para Paris, Émilie estava grávida pela terceira vez. Seu filho Victor Esprit nasceu em abril de 1733. Provavelmente a mãe o entregou aos cuidados de uma ama-de-leite, como era comum na época, e passou a levar uma vida social intensa. Nesse período, durante um curto tempo, ela se tornou amante do Duque de Richelieu, que parece ter estimulado seus interesses intelectuais. Em 1733 ela começou a se dedicar bastante ao estudo da matemática, aprendendo álgebra e cálculo diferencial e integral com Maupertuis, com quem também manteve um relacionamento amoroso. Na época, Maupertuis era um dos poucos franceses a conhecer e defender a física de Newton, o que fez com que Émilie começasse a se aprofundar no estudo da física newtoniana.

Voltaire tinha frequentado o salão de seu pai, e Émilie provavelmente o conheceu nesse período. Porém, foi em 1733 que ela o reencontrou, iniciando uma forte amizade, baseada em interesses comuns. Nessa época, Voltaire tinha 39 anos; Émilie tinha 27. Sua ligação duraria quinze anos.

Uma das propriedades da família Chastellet ficava em Cirey, no Ducado de Lorena (Lorraine), ao noroeste da França. Desde o século X, esse Ducado era um Estado autônomo, não pertencendo à França. Quando, em 1734, as “Cartas filosóficas” foram proibidas na França e Voltaire corria o risco de ser novamente preso, Émilie o convidou para viver em seu palácio em Cirey, com a concordância do marido. Lá, Voltaire ficava a salvo de qualquer tentativa de prisão por parte do governo francês. Sob a proteção da Marquesa de Châtelet, Voltaire teve um grande período de tranquilidade. Depois de um ano, Émilie também passou a viver em Cirey e só então eles começaram um relacionamento amoroso.

Nos anos seguintes, os dois se dedicaram intensamente a estudos em conjunto – especialmente sobre a filosofia natural de Newton. Usando parte de sua fortuna, Voltaire reformou parte do palácio de Cirey que estava em mal estado, construiu uma nova ala, instalou um laboratório ricamente aparelhado com instrumentos produzidos pelo padre Jean Antoine Nollet (1700-1770), criou um pequeno teatro e organizou com Émilie uma grande biblioteca, que chegou a cerca de 20.000 livros. Tudo isso teria sido impossível sem os recursos financeiros de Voltaire, já que o Marquês de Chastellet tinha uma renda bastante limitada e muitas vezes precisava fazer empréstimos.

Embora distante de Paris, o local se tornou um centro intelectual, atraindo visitantes que às vezes lá permaneciam durante meses ou anos. Esse período de quinze anos de convivência entre Émilie e Voltaire, seus estudos, atividade epistolar, conversas e discussões, pesquisas e publicações, é a fase em que a Marquesa de Châtelet desabrochou como intelectual. Porém, ela nunca abandonou seus outros interesses culturais, artísticos e sociais.

Voltaire e ela organizaram no palácio a apresentação de peças teatrais das quais eles próprios participavam; havia concertos musicais em Cirey; Émilie se dedicava também aos jogos, perdendo grandes somas que eram pagas por Voltaire; e faziam viagens juntos, inclusive a Paris, depois que passou o perigo de que Voltaire fosse preso.

Durante todo o período do relacionamento amoroso entre Émilie e Voltaire, o Marquês de Chastellet aceitou a situação e manteve uma relação cordial com o escritor.

As obras de Émilie e de Voltaire

Durante essa fase, Voltaire continuou a se dedicar à literatura, compondo poemas e peças teatrais como *Mérope*, escrevendo sobre história e se dedicando a estudos científicos. Émilie e ele também se envolveram com estudos sobre religião. Aparentemente, no início dessa fase, ambos estavam encantados com o pensamento de Newton. Maupertuis, que frequentou Cirey, era um newtoniano convicto, estimulando essa vertente dos dois amigos. Em 1736, Voltaire escreveu um poema dedicado a Émilie, sobre a filosofia de Newton.

O conde Francesco Algarotti (1712-1764), de Veneza, que passou alguns meses com eles em 1735, foi um dos divulgadores do newtonianismo na Europa continental. As conversas que manteve com a Marquesa de Châtelet a respeito da óptica de Newton tiveram grande influência na redação de seu livro *Newtonianismo per le dame*, publicado em 1737. Inversamente, Émilie se beneficiou muito desse contato e começou a se dedicar intensamente à óptica newtoniana, tendo redigido, entre 1738 e 1739, duas versões de seu estudo sobre o assunto, que permaneceram sob forma manuscrita: *Abrégé de l'optique de mr Newton* e *Essai sur l'optique*.

Em 1735, a Academia de Ciências de Paris propôs um prêmio para o melhor trabalho sobre a natureza e a propagação do fogo. Tanto Émilie quanto Voltaire se interessaram pelo desafio e começaram a se dedicar ao tema, realizando experimentos e redigindo separadamente dois trabalhos, que submeteram ao concurso em 1737. O resultado, divulgado em 1738, foi uma decepção para eles: Leonhard Euler (1707-1783) obteve o primeiro prêmio e outros dois trabalhos também foram contemplados pela comissão julgadora – mas não os deles. Porém, solicitaram à Academia um favor, e foram atendidos: as memórias de Voltaire e de Émilie também foram publicadas, além das dos vencedores, em 1739. Esta foi a primeira vez em que a Academia de Ciências de Paris publicou um trabalho escrito por uma mulher.

Paralelamente, Voltaire estava compondo, com a colaboração de Émilie, uma obra de divulgação sobre o pensamento de Newton. Acredita-se que a parte desse livro relacionada com a óptica foi redigida por ela, embora o trabalho tenha sido publicado como se fosse apenas de autoria de Voltaire.

Em 1738, saiu a primeira edição (não autorizada e incompleta) do livro, intitulado *Elémens de la philosophie de Neuton* [*sic*] *mis à la portée de tout le monde*. Voltaire se enfureceu com o editor de Amsterdam, preparando imediatamente uma nova versão que foi publicada no mesmo ano, na França e na Holanda. Essa pode ser considerada a mais importante contribuição de Voltaire (com a colaboração anônima de Émilie) para a divulgação do pensamento de Newton, na Europa continental, tornando acessível seu pensamento e influenciando a aceitação, na França, de suas teorias sobre gravitação e óptica, bem como de seu pensamento geral sobre ciência. Émilie publicou uma resenha elogiosa sobre o livro, no *Journal des Sçavans*, no mesmo ano. Traduzida depois para o italiano e para o alemão, a obra produziu um grande impacto, gerando críticas por parte de autores franceses e de outros países.

Nesse momento, entretanto, Émilie estava se afastando do pensamento newtoniano, passando a ser fortemente influenciada pela filosofia de Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), que ela estudou principalmente através das obras do filósofo Christian Wolff (1679-1754). Voltaire, pelo contrário, permanecia fiel a Newton. Certamente houve discussões entre eles a respeito disso, mas suas discordâncias filosóficas não afetaram sua amizade. Para prosseguir em seus estudos de matemática, em 1739, Émilie contratou e levou para Cirey um novo tutor de matemática, Johann Samuel König (1712-1757), que havia sido discípulo do famoso matemático suíço Johann Bernoulli (1667-1748) e lhe fora recomendado por Maupertuis. Além de lhe ensinar matemática avançada, König a influenciou defendendo a filosofia de Leibniz e criticando Newton.

Em 1740, Émilie publicou a primeira edição de sua obra *Institutions de physique*. O livro era dedicado a seu filho Louis Marie Florent, que tinha 13 anos de idade, sendo apresentado como uma contribuição para sua educação. No entanto, não era uma obra didática, mas um ensaio profundo sobre as bases do conhecimento científico, incluindo discussões metafísicas sobre o espaço e o tempo. O ponto de vista filosófico adotado por Émilie foi, essencialmente, o de Leibniz – porém sem aderir totalmente às suas ideias. A publicação dessa obra produziu um conflito de Émilie com König, que a acusou de se basear nos seus ensinamentos sem citá-lo. No entanto, sabe-se atualmente que o primeiro manuscrito dessa obra, muito semelhante à primeira edição, já estava pronto em 1738, antes do contato de Émilie com König.

Assim como ela havia publicado uma resenha do livro de Voltaire, este escreveu, em 1741, uma resenha das *Institutions de physique*, que saiu na revista *Bibliothèque Raisonnée des Ouvrages des Savans de l'Europe*. Porém, antes disso, em 1740, ele publicou *La métaphysique de Neuton, ou parallele des sentimens de Neuton et de Leibnitz* [*sic*], defendendo o pensamento newtoniano, contrariamente à postura de Émilie.

Nas *Institutions de physique*, Émilie tomou o partido de Leibniz em relação a uma questão técnica que era bastante discutida na época. René Descartes havia formulado o conceito de quantidade de movimento (proporcional à massa e à velocidade do corpo) e defendera sua conservação. Leibniz criticou Descartes, defendendo que a verdadeira medida do movimento de um corpo é sua "força viva" (*vis viva*), proporcional à sua massa e ao quadrado da velocidade do corpo – um conceito de onde surgiu, posteriormente, o de energia cinética. Na França, a maior parte dos autores aceitava a abordagem de Descartes e não a de Leibniz. Émilie criticou diretamente o trabalho de um deles, Jean-Jacques d'Ortous de Mairan, que havia sucedido Fontelle como secretário da Academia de Ciências de Paris. Não contente em criticá-lo, ela o provocou, enviando-lhe de presente uma cópia do livro. Mairan reagiu, publicando em 1741 um panfleto no qual se defendia e criticava a Marquesa de Châtelet. Esta, por sua vez, retrucou imediatamente com outro panfleto, no qual não apenas argumentava novamente a favor de Leibniz, como também analisava impiedosamente o texto de Mairan e seu estilo, comparando-o desfavoravelmente com o famoso Fontenelle. Mairan preferiu não prosseguir o debate. Voltaire não ficou contente com a postura leibniziana de Émilie e pediu que James Jurin, secretário da *Royal Society*, o ajudasse a convencê-la de que estava errada. Ele escreveu para Émilie, cuja resposta, de 1744, defendendo sua posição, foi publicada em 1747.

O livro de Émilie, bem como sua discussão com Mairan tiveram grande repercussão. Vários trechos das "Instituições de Física" foram, depois, incluídos em verbetes da *Encyclopédie* de Diderot e d'Alembert, sem citar o seu nome. O livro foi reeditado em francês, com muitos acréscimos, em 1742, incluindo também os panfletos sobre as forças vivas. Foi traduzido para o italiano, incluindo o debate com Mairan; e para o alemão, havendo também uma edição separada dos panfletos de Mairan e dela, sobre a força viva. É interessante apontar que a primeira obra publicada pelo filósofo Immanuel Kant (1724-1804), em 1746 (ou seja, seu primeiro escrito pré-crítico, aos 22 anos de idade), intitulada *Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte*, foi inspirada pelos trabalhos de Émilie e de Mairan, citados e discutidos detalhadamente.

No início da década de 1740, tanto Émilie quanto Voltaire publicaram novas edições de seus livros, com muitos acréscimos. A Marquesa publicou também sua dissertação sobre a natureza e a propagação do fogo, em 1744, com várias alterações. Voltaire, no entanto, após a publicação dos "Elementos da filosofia de Newton" e da sua metafísica, foi se distanciando da filosofia natural. Muitos fatores podem ter contribuído para isso. Por um lado, já havia completado a obra que havia se proposto fazer, divulgando o pensamento de Newton. Além disso, já não sofria perseguição política na França, graças ao apoio de René Louis de Voyer de Paulmy (1694-1757), Marquês d'Argenson, seu amigo de infância, que em 1744 se tornou ministro de assuntos estrangeiros; e também de Jeanne-Antoinette Poisson (1721-1764), Marquesa de Pompadour, amante favorita do rei Louis XV, que era sua admiradora. Por outro lado, mantinha contato com o poderoso rei da Prússia, Frederick II (1712-1786), que o considerava o maior intelectual de toda a Europa e queria levá-lo para Berlim. Por já não mais precisar ficar oculto em Cirey sob a proteção de Émilie, começou a viajar e a desenvolver atividades políticas, realizando missões diplomáticas, obtendo, por fim, um lugar na Academia Francesa e o posto de "historiógrafo da França" concedido por Louis XV. Sua atenção se concentrou novamente na produção de obras literárias e históricas.

A última obra de Émilie

Enquanto Voltaire se afastava das preocupações científicas, Émilie, pelo contrário, continuou a se envolver cada vez mais com o pensamento de Newton, complementando sua formação matemática com o auxílio de Alexis Claude Clairaut (1713-1765), que já lhe dava aulas particulares há alguns anos. Começou a estudar os *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* de Newton e parece ter se encantado com essa obra, pois em 1744 tomou a decisão de traduzi-la para o francês. Porém, não se deve imaginar que se tratava apenas de traduzir o texto dessa obra de Newton do latim para o francês. Ela resolveu não apenas traduzir os *Principia*, como também fazer uma série de adições e comentários ao texto, bem apresentar suas deduções utilizando um novo formalismo algébrico, com auxílio do cálculo diferencial e integral, facilitando a compreensão dos raciocínios newtonianos, que haviam sido apresentados originalmente utilizando um método puramente geométrico. Além disso, introduziu em seu comentário o uso da "força viva" de Leibniz (que Newton, evidentemente, não utilizava), desenvolvendo um princípio semelhante ao que denominamos conservação da energia mecânica.

Embora Voltaire continuasse a residir em Cirey durante a maior parte do tempo, ele e Émilie foram se afastando, sob o ponto de vista afetivo. Em 1744, Voltaire tornou-se amante da bela atriz Jeanne-Catherine Gaussem (1711-1767) ou Marie-Madeleine, também chamada como Mademoiselle Gaussin. No ano seguinte, ele iniciou uma relação amorosa com sua própria sobrinha Marie-Louise Mignot (1712-1790), mais conhecida como Madame Denis, que havia se tornado viúva recentemente. Tomando conhecimento desses casos românticos de Voltaire, Émilie percebeu que eles já não eram mais o antigo casal apaixonado.

Nesse período, Émilie escreveu uma obra que só foi publicada muito tempo depois de sua morte, chamada *Discours sur le bonheur*. Trata-se de um texto pessoal e íntimo, que provavelmente ela não pretendia divulgar. Nele, defendeu a ideia de que só é válido viver em busca da satisfação de seus prazeres, aceitando suas paixões e, paradoxalmente, atingindo uma paz interior.

Em 1748, ela e Voltaire visitaram o castelo de Lunéville de Stanislas Leszczynski (1677-1766), que havia sido rei da Polônia (Stanislas I) e era na época Duque de Lorena. Lá, Émilie conheceu e se enamorou pelo poeta Jean François de Saint-Lambert, tornando-se seu amante. Por causa desse relacionamento, ficou grávida e, como já era "idosa" (41 anos de idade), ficou temerosa de que pudesse não sobreviver ao parto. Desde o início de 1749, passou a se dedicar mais intensamente ao trabalho de tradução e comentário dos *Principia* de Newton.

Tomada por um pressentimento sinistro, Émilie se encerrou no seu quarto em Paris durante seis meses, para terminar sua grande obra. A maior parte da tradução já tinha sido realizada, mas faltava completar o anexo, trecho em que ela reapresentava a primeira parte da obra de Newton com uma abordagem analítica, empregando o formalismo do cálculo diferencial e integral desenvolvido por Leibniz – que Newton havia odiado. Posteriormente, foram lançadas suspeitas de que essa parte do trabalho tivesse sido realizada por Clairaut – mas o manuscrito deixado por Émilie mostra que foi ela própria a autora dessa reformulação dos *Principia*.

Em uma carta que escreveu a Saint-Lambert em maio de 1749, Émilie descreveu sua rotina nesse período, que exigia uma força de vontade extraordinária. Ela acordava entre 8 e 9 horas da manhã e trabalhava até as três da tarde. Fazia uma pausa para tomar café e trabalhava novamente das quatro da tarde até às dez da noite. Então, fazia uma refeição sozinha, depois conversava com Voltaire, que estava com ela em Paris. Da meia-noite até às cinco horas da manhã, trabalhava novamente. Dormia apenas três ou quatro horas por noite.

Em julho de 1749, acompanhada por Voltaire, Émile viajou para Lunéville, para se preparar para o parto, onde poderia ter a assistência dos médicos da corte do Duque de Lorena. Mas sua maior preocupação continuava sendo sua tradução dos *Principia* de Newton. Clairaut e Voltaire lhe asseguraram que, se algo lhe acontecesse, eles se responsabilizariam por sua publicação. Porém, ela se sentia insegura e queria garantir que o manuscrito não fosse perdido. Tomou, então, uma decisão curiosa. Escreveu uma carta ao Abade Claude Sallier (1685-1761), que era bibliotecário do gabinete de manuscritos da Biblioteca Real, encaminhando-lhe seu manuscrito e pedindo-lhe que o registrasse na Biblioteca. O pedido era excepcional, pois os manuscritos conservados na Biblioteca Real eram obras muito antigas; além disso, tratava-se do pedido de uma mulher, o que tornava a situação ainda mais estranha. Apesar da situação excepcional, o Abade Sallier acolheu a solicitação.

No dia 4 de setembro, nasceu a filha de Émilie, que recebeu o nome de Stanislas-Adélaïde. Nos dias seguintes, a mãe parecia estar bem, mas piorou no dia 9 e faleceu subitamente no dia 10 de setembro.

Um mês depois do falecimento de Émilie, Voltaire escreveu uma carta ao rei Frederick II em que comentou: “Perdi um amigo [*un ami*] de vinte e cinco anos, um grande homem que só tinha o defeito de ser uma mulher, e que toda Paris lamenta e honra". Certamente nem Voltaire, nem Émilie, queria que ela fosse vista essencialmente como uma *mulher* e sim como uma *pessoa*, independentemente de seu gênero.

Voltaire e Clairaut assumiram a responsabilidade pela publicação de sua grande obra, que teve uma edição parcial em 1756 e outra, completa, em 1759. Esse trabalho teve grande importância não apenas na divulgação dos *Principia* na França, mas também para a compreensão mais profunda da obra em toda Europa.

Considerações finais

Émilie de Châtelet conseguiu realizar uma grande obra intelectual, movida por uma ambição pouco comum entre as mulheres da época, empregando um imenso esforço em seu estudo e trabalho e, certamente, beneficiando-se de uma grande capacidade pessoal. Voltaire foi, sem dúvida, um ponto de apoio importante na sua fase produtiva, sob os pontos de vista emocional, intelectual e financeiro; mas ela não pode ser considerada, de modo nenhum, como um simples apêndice do famoso escritor. Estudada durante muito tempo apenas como uma curiosidade, como uma das amantes de Voltaire, nas últimas décadas tem aumentado muito o interesse pela obra da Marquesa de Châtelet. Há, no entanto, muitos aspectos inexplorados de sua obra, que merecem um estudo mais aprofundado.

Referências

BADINTER, E. **Émilie, Émilie**: l'ambition féminine au XVIIIe siècle. Paris: Flammarion, 1983.

RODRIGUES, A. A bibliography. *In*: HAGENGRUBER, Ruth (ed.). **Emilie du Châtelet between Leibniz and Newton**. New York: Springer, 2012. p. 207-246.

WADE, I. O. **Voltaire and Madame Du Châtelet**: an essay on the intellectual activity at Cirey. Princeton: Princeton University Press, 1941.

ZINSSER, J. P. **La dame d'esprit**: a biography of the Marquise Du Châtelet. New York: Viking, 2006.

Amoroso Costa e os postulados de Veblen para a geometria euclidiana

***Rodrigo Rafael Gomes*[2]**

Introdução

O presente estudo faz um pequeno recorte do trabalho de escrita científica do matemático brasileiro Manuel Amoroso Costa (1885-1928), concentrando-se em uma exposição sua sobre geometria contida no livro *As idéas fundamentaes da mathematica* (1929). Tal exposição versa sobre um sistema de postulados para a geometria euclidiana elaborado pelo matemático estadunidense Oswald Veblen (1880-1960), contemporâneo do primeiro.

Os pressupostos que guiaram este trabalho são de que os processos de produção, transmissão e utilização de textos são parte intrínseca da atividade científica e que o percurso de elaboração do texto ocorre paralelamente ao das ideias que este contém (CHEMLA, 2004). Por esse motivo, além de fazer um exame comparativo entre publicações dos dois matemáticos, foram considerados os dois manuscritos de próprio punho do livro de Amoroso Costa contidos em seu arquivo pessoal. Os documentos consultados constituem os dossiês AC.T.3.031 e AC.T.3.033, assim codificados no Arquivo de História da Ciência do Museu de Astronomia e Ciências Afins.

Quem foi Amoroso Costa?

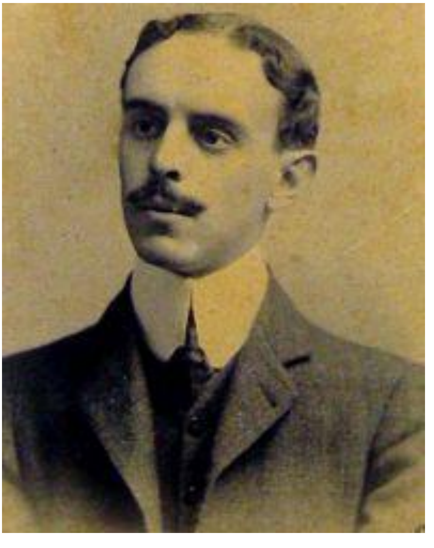
Amoroso Costa (Figura 1) é um personagem que não pode ser ignorado quando o assunto é a matemática brasileira nas

[2] Doutor em Educação Matemática, professor do Instituto Federal de São Paulo, *campus* Bragança Paulista. *E-mail*: rodrafagomes@ifsp.edu.br.

primeiras décadas do século XX. Talvez por esse motivo, inúmeras biografias e trabalhos tenham sido escritos a seu respeito[3].

Engenheiro civil formado na Escola Politécnica do Rio de Janeiro – instituição na qual também obteve o grau de bacharel em ciências físicas e matemáticas e da qual seria professor anos mais tarde –, foi defensor da institucionalização dos estudos matemáticos no país, fez e ministrou cursos na França, foi o representante brasileiro no Congresso Internacional de Matemáticos de 1924, participou da fundação da Sociedade Brasileira de Ciências e das atividades da Associação Brasileira de Educação. Também atuou como divulgador da ciência, tendo escrito artigos expositivos sobre matemática e física teórica para jornais da capital fluminense.

Figura 1. Amoroso Costa.



Fonte: site do Museu de Astronomia e Ciências Afins. Disponível em: http://site.mast.br/hotsite_acervo_arquivistico/amoroso_costa.html.

[3] O leitor encontrará alguns deles nas referências, inclusive um de minha autoria.

Sua existência, junto com a de outras personalidades, foi abruptamente interrompida pela queda de avião que prestava homenagens a Santos Dumont quando este retornava ao Brasil. O tempo que viveu, porém, foi suficiente para escrever dois livros: *Introdução à teoria da relatividade* (publicado em 1922, é o primeiro sobre o tema escrito no país) e *As idéas fundamentaes da mathematica* (publicado postumamente).

No segundo livro, Amoroso Costa aborda questões metodológicas, filosóficas e históricas relacionadas à matemática e os desenvolvimentos mais recentes de sua época no âmbito da lógica simbólica, da teoria dos conjuntos, do cálculo diferencial e integral e da álgebra, e discorre sobre os fundamentos da geometria e seus desdobramentos.

A obra é constituída por dezenove capítulos. No XVI, intitulado “Os princípios da geometria euclidiana”, ele apresenta, de forma resumida, um sistema de postulados para a geometria de autoria do matemático Oswald Veblen, que, em 1911, publicara uma monografia sobre o tema.

Antes de entrar em detalhes sobre esses postulados e sobre as observações de Amoroso Costa a respeito deles, convém apresentar o seu colega americano.

O colega americano

Cinco anos mais velho que o matemático brasileiro, Oswald Veblen (Figura 2) encontrou em seu país condições um pouco mais favoráveis que o primeiro para a realização de seus estudos. Veblen obteve o grau de doutor (Ph.D.) em 1903, no então recentemente criado departamento de matemática da Universidade de Chicago, que caminhava rapidamente para se tornar um importante centro de estudos matemáticos no hemisfério norte. Na mesma época, no Brasil, o ensino superior da matemática ainda estava restrito às escolas de engenharia.

Em 1905, Veblen foi para a Universidade de Princeton, onde foi promovido a *full professor* em 1910, lá permanecendo até ser nomeado, em 1932, para o Instituto de Estudos Avançados. Neste último, manteve o posto de professor até receber o título de professor emérito, em 1950. Faleceu dez anos depois, aos 80.

Figura 2. Oswald Veblen por volta dos 35 anos.

Fonte: Domínio público (autoria desconhecida). Disponível em: http://legacyrlmoore.org/photos/veblen_o.html.

A maior parte do trabalho de pesquisa que desenvolveu esteve relacionado à geometria, tema de sua tese de doutorado. Em sua honra, foi instituído o Prêmio Oswald Veblen, concedido desde a década de 1960 a investigações que se notabilizam nessa área.

Ele teve papel central na criação e consolidação do Instituto de Estudos Avançados em Princeton, tendo sido responsável pelo recrutamento dos primeiros físicos e matemáticos da instituição, entre eles Einstein, von Neumann e Weyl. E sua influência foi decisiva, nos anos que se seguiram, para a realocação em seu país de inúmeros matemáticos que fugiram da Europa após a ascensão de Hitler ao poder (MONTGOMERY, 1963). Foi presidente da Sociedade Americana de Matemática e do XI Congresso Internacional de Matemáticos.

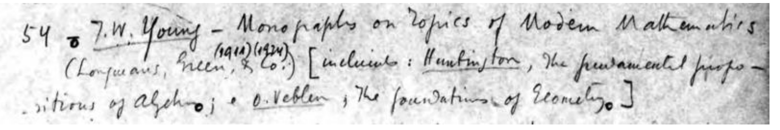
Uma exposição axiomática da geometria para professores

Com o propósito de expandir o conhecimento matemático de professores do ensino secundário e de estudantes universitários, colocando-os em contato com resultados e pontos de vista característicos de tópicos selecionados de matemática avançada, o livro *Monographs on topics of modern mathematics relevant to the elementary field* foi publicado em 1911. Editado pelo matemático e educador matemático Jacob William Albert Young (1865-1948), então professor da Universidade de Chicago, a obra continha nove trabalhos sobre temas específicos de matemática superior, o primeiro deles uma monografia sobre geometria euclidiana produzida por Oswald Veblen.

Conforme indicado em suas notas pessoais (Figura 3), na lista de referências bibliográficas do primeiro dos rascunhos de *As idéas fundamentaes da mathematica*, Amoroso Costa teve acesso a duas edições da obra editada por Young, tendo se baseado no texto de Veblen para compor um dos capítulos de seu próprio livro. A escolha, assim justifica-se no livro, deveu-se à simplicidade do sistema de postulados proposto pelo geômetra estadunidense.

A palavra "postulado" não é usada por Veblen em seu texto, que preferiu adotar o termo "suposição" (*assumption*), por ele considerado menos comprometedor. "Não entraremos", diz, "na questão metafísica de saber se essas suposições são verdades auto-evidentes, axiomas, noções comuns, dados experimentais ou o que quer que sejam" (VEBLEN, 1924, p. 4). Suposições são, para ele, proposições iniciais, (i) a partir das quais outras proposições são deduzidas e (ii) para as quais não existam proposições das quais possam ser deduzidas. São proposições que "podem ser declaradas de forma tão plausível que ninguém duvide de sua verdade, mas se são ou não verdadeiras não pode afetar a correção do raciocínio baseado nelas, nem o fato de serem suposições”, explica (Ibid., p. 4).

Figura 3. Recorte do dossiê AC.T.3.031, fólio 3, do Arquivo Amoroso Costa, no qual consta anotação das duas primeiras edições (1911 e 1924) do livro organizado por Young, com destaque para duas monografias que o compunham (a de Veblen, em particular).


54 J. W. Young – Monographs on Topics of Modern Mathematics (Longmans, Green, & Co.) (1911) (1924) [incluindo: Huntington, The fundamental propositions of algebra; e O. Veblen, The foundations of Geometry.]

Fonte: próprio autor.

Amoroso Costa, atento às discussões sobre os fundamentos da matemática do período, considerava “axioma” e “postulado” nomenclaturas para conceitos equivalentes. “As proposições iniciaes formam um corpo homogeneo, nenhuma dellas sendo privilegiada pela sua maior ou menor evidencia. É, pois, indifferente adoptar um ou outro desses dois termos” (COSTA, 1929, p. 36), diz em seu livro, o que o levou a optar pela utilização do segundo ao longo dele: “Empregaremos sempre o termo *postulado*, cujo sentido etymologico corresponde sufficientemente ao que lhe attribuimos aqui. Postulado significa ‘o que se pede’, o que se suppõe concedido; no caso presente, aquillo que não nos obrigamos a demonstrar.” (Ibid., p. 36-37).

Os postulados de ordem

O sistema de Veblen é constituído por 16 postulados (“suposições” segundo sua terminologia), dos quais seguem 38 teoremas, que são demonstrados um a um. Todo o trabalho tem 51 páginas. Como a proposta do livro de Amoroso Costa era tratar de diferentes assuntos, discutir todas as consequências dos postulados era impensável. Por isso, o brasileiro acabou optando por apresentá-los apenas, expondo algumas de suas implicações.

Como exposto por Amoroso Costa em seu livro, três noções primitivas são adotadas por Veblen: (i) *ponto*, (ii) *ordem* $\{ABC\}$ *de três pontos* e (iii) *congruência de dois pares de pontos* (A, B) *e* (C, D). Tais noções, "como em toda a theoria deductiva formal", diz, "ficam indefinidas e suas propriedades resultam exclusivamente dos postulados" (COSTA, 1929, p. 194).

Vejamos a tradução de Amoroso Costa para os postulados de ordem e as opções que fez para apresentá-los ao leitor. Comecemos pelos dois primeiros, tal como se apresentam na primeira edição de seu livro:

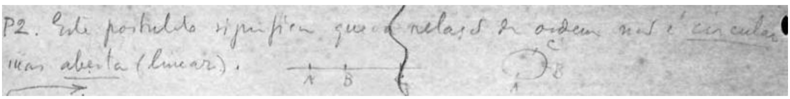
P1. *Se pontos A, B, C, estão na ordem {ABC}, esses pontos são distinctos.*

P2. *Se pontos A, B, C, estão na ordem {ABC}, esses pontos não estão na ordem {BCA}.*

Ao contrário de Veblen, que não faz nenhuma observação a respeito deles em seu texto, Amoroso Costa julgou conveniente destacar que o postulado 2 estabelece que a relação de ordem "não é circular, mas aberta".

No primeiro esboço para o livro, ele havia escrito "linear" entre parênteses na frente de "aberta", fazendo dois desenhos (Figura 4) que ilustram a diferença entre os dois tipos de relação.

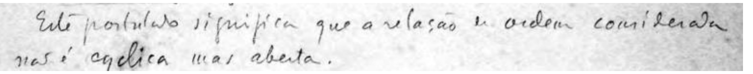
Figura 4. Recorte do dossiê AC.T.3.031, verso do fólio 149, do Arquivo Amoroso Costa, onde consta anotação deste a respeito do postulado 2.



Fonte: próprio autor.

No segundo rascunho (Figura 5), mudou de ideia e escreveu "a relação de ordem considerada não é cyclica mas aberta".

Figura 5. Recorte do dossiê AC.T.3.033, fólio 2 do segundo rascunho do capítulo.


Este postulado significa que a relação de ordem considerada não é cyclica mas aberta.

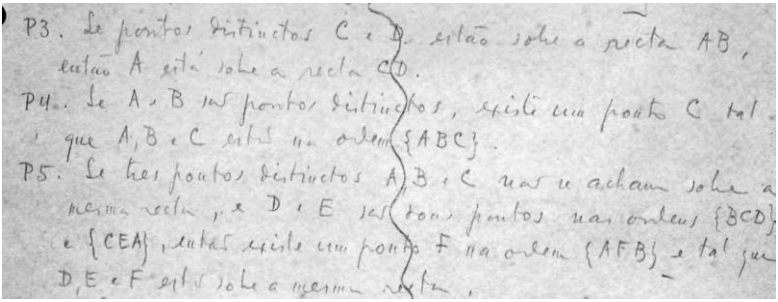
Fonte: próprio autor.

O comentário é importante porque se trata de uma relação entre três elementos (ternária) e o axioma garante que não mais do que um desses três elementos poderá ocupar a posição central, ou seja, "estar entre" os outros dois, algo que não acontece em uma ordem cíclica, como aquela que existe entre três pontos, dois a dois distintos, sobre uma circunferência. Embora correto, relações ternárias não são discutidas previamente no livro, assim, a menos que o leitor tivesse familiaridade com o assunto, dificilmente entenderia o que Amoroso Costa quis dizer.

Dos dois primeiros postulados seguem as definições de reta e de segmento de reta, às quais o brasileiro acrescentou à de semirreta, que é apresentada somente mais adiante no texto do americano. Essas definições diferem ligeiramente das do original. Enquanto Veblen estabelece, por exemplo, que a reta AB *consiste* de A e B e todos os pontos X que estão nas ordens $\{ABX\}, \{AXB\}$ e $\{XAB\}$, Amoro Costa define o mesmo objeto como sendo *o conjunto* desses pontos.

A adoção de uma linguagem "conjuntista" para exprimir a relação entre ponto e reta é coerente com a empregada em capítulos anteriores do livro, nos quais os conceitos da teoria dos conjuntos estão presentes, ao mesmo tempo que confere significado, em termos dessa teoria, a tal relação. Não é possível saber com certeza se esse foi o motivo da alteração, mas é razoável supor que tenha ocorrido durante o processo de escrita de *As idéas fundamentaes da mathematica*, uma vez que os enunciados dos postulados 3 e 5 (a seguir) foram modificados desde a primeira versão do texto, como é possível notar nos esboços do livro deixados por Amoroso Costa (Figura 6).

Figura 6. Recorte do dossiê AC.T.3.031, fólio 150, do Arquivo Amoroso Costa, onde consta a primeira tradução dos postulados 3 a 5.


P3. Se pontos distinctos C e D estão sobre a recta AB, então A está sobre a recta CD.
P4. Se A e B são pontos distinctos, existe um ponto C tal que A, B e C estão na ordem {ABC}.
P5. Se tres pontos distinctos A, B e C não se acham sobre a mesma recta, e D e E são dois pontos nas ordens {BCD} e {CEA}, então existe um ponto F na ordem {AFB} e tal que D, E e F estão sobre a mesma recta.

Fonte: próprio autor.

Os postulados 3 e 5, conforme a primeira edição do livro, são:

P3. *Se pontos distinctos C e D pertencem á recta AB, então A pertence á recta CD.*

P5. *Se tres pontos distinctos A, B, C, não pertencem a uma mesma recta, e se D e E são dois pontos nas ordens {BCD} e {CEA}, então existe um ponto F, na ordem {AFB}, e tal que D, E, F, pertencem a uma mesma recta*.

Como se vê claramente na Figura 6, em sua redação original, o autor escreveu "estão sobre a recta", em P3, e "não se acham sobre a mesma recta", em P5, que ele depois mudou para "pertence à recta" e "não pertencem a uma mesma recta", respectivamente.

Nos dois rascunhos do livro contidos em seu arquivo pessoal, ele denomina P5 "postulado da transversal", não fornecendo uma justificativa para assim nomeá-lo. A denominação não se manteve no livro, mas as observações sobre tal proposição registradas nos dois manuscritos permaneceram. Amoroso Costa observa que, com o auxílio do postulado, demonstra-se a existência de um terceiro ponto entre dois pontos distintos quaisquer, pertencente à mesma reta à qual estes pertencem, e que esse fato implica a existência de infinitos pontos sobre qualquer reta ou segmento de reta, resumindo assim o conteúdo dos teoremas 4 e 11, respectivamente, do sistema de Veblen.

O último postulado de ordem é o que permite, segundo Amoroso Costa, “sair da reta” e obter a noção de triângulo, estabelecendo que:

P6. *Existem tres pontos distinctos, A, B, C, que não estão em nenhuma das ordens {ABC}, {BCA}, {CAB}.*

Ele nada diz além disso, mas o teorema 3 de Veblen, cuja demonstração se baseia no postulado acima, determina a existência, para qualquer reta, de um ponto não pertencente a ela. O teorema garante, portanto, a existência de três pontos que não estão numa mesma reta, o que permite definir o triângulo cujos vértices são esses pontos.

Postulado de Arquimedes

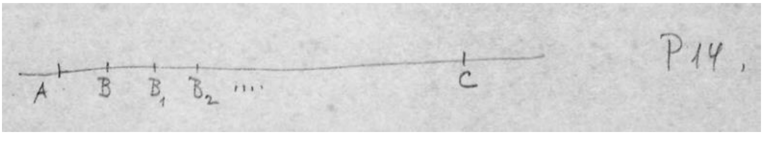
Os cinco postulados seguintes aos de ordem determinam o sentido da relação de congruência, a última das três noções primitivas do sistema. A ideia habitual de tal relação exprime a igualdade entre duas distâncias, comenta Amoroso Costa, e a partir dos postulados que lhe dizem respeito é possível “demonstrar que uma recta qualquer é congruente com outra recta qualquer, uma semi-recta qualquer com outra semi-recta qualquer; e além disso, introduzindo a noção de angulo recto, que um angulo recto qualquer é congruente com outro ângulo recto qualquer” (1929, p. 196), diz adiante. Esses resultados são de fato demonstrados por Veblen em seu texto, no qual o conceito de congruência de dois conjuntos de pontos é definido a partir da relação primitiva de congruência entre pares de pontos.

Particularmente significativo para Amoroso Costa é o décimo quarto postulado, que diz respeito às três noções primitivas. Trata-se do postulado de Arquimedes, que assim ele traduziu:

P14. *Se A, B, C, são tres pontos na ordem {ABC}, e* B_1, B_2, *..., são pontos nas ordens {*ABB_1*}, {*ABB_2*}, ..., taes que (A, B) é congruente com cada um dos pares (B,* B_1*), (B,* B_2*), ..., então não existe senão um número finito dos pontos* B_1, B_2 *..., que estejam situados entre A e C.*

Amoroso Costa explica que o que se estabelece acima é a existência de um número n tal que a distância AC é inferior a n vezes a distância AB. No segundo rascunho para o livro, ele até reproduziu um desenho (Figura 7) de Veblen que ilustra o conteúdo da proposição, mas que não permaneceu na publicação.

Figura 7. Recorte do dossiê AC.T.3.033, verso do 5º fólio dos rascunhos do capítulo XVI de *As idéas fundamentaes da mathematica*, Arquivo Amoroso Costa.



Fonte: próprio autor.

O postulado de Arquimedes é retomado no capítulo seguinte, em uma seção que trata das geometrias não-arquimedianas, que se baseiam em sua negação. Sobre esse tema, Amoroso Costa realizou na Universidade de Paris, em 1928, uma série de conferências. Porém, exceto pela breve discussão que apresenta no capítulo XVII do livro, ele nada mais publicou a respeito, e o manuscrito de suas conferências desapareceu (MOREIRA, 1995).

Considerações finais

Seja pelo papel que desempenhou nos debates que conduziriam à institucionalização da matemática no Brasil, seja pelo registro que fez desses debates em seus escritos, Amoroso

Costa é citado com frequência em estudos sobre a história das ciências exatas no país no início do século passado. O foco de parte desses estudos – como é o caso de Silva (2006) e Siqueira (2018) – não é sua pessoa ou sua obra, mas questões político-institucionais e socioculturais ligadas ao contexto científico ao qual pertenceu. Outras pesquisas se debruçaram sobre sua vida e sobre aspectos relacionados ao conteúdo de seu trabalho – dos quais são exemplos Gomes (2021), Silva (2000) e Eisenstaedt e Fabris (2004).

O presente trabalho, como o leitor deve perceber, está inserido na última categoria de estudos, embora não ignore os fatores externos ao conteúdo matemático que foi abordado. Esses fatores dizem respeito, por exemplo, às condições institucionais sob as quais Amoroso Costa se encontrava quando escrevia e refletia sobre esse conteúdo. Enquanto nos Estados Unidos surgiam faculdades específicas voltadas para o estudo da matemática – que se tornava uma atividade exclusiva de um novo tipo de profissional, o matemático –, no Brasil os estudos matemáticos eram um aspecto da formação e da atuação dos engenheiros. Isso não impediu o brasileiro de se dedicar à matemática, embora seja preciso avaliar como essas circunstâncias influenciaram o tipo de matemática que produziu. E essa dedicação, como vimos, foi além das atividades acadêmicas, aspecto, aliás, que aproxima sua trajetória da de seu colega americano.

A obra *As idéas fundamentaes da mathematica*, produto dos estudos matemáticos realizados por Amoroso Costa em circunstâncias sócio-históricas específicas, lida com uma ampla variedade de temas. Aqui apresentei apenas um fragmento de um dos assuntos tratados no livro, cuja abordagem foi apropriada do trabalho do matemático Oswald Veblen. Vimos que, exceto pelas adaptações de terminologia que fez, ele pouco acrescentou em relação às explicações sobre os postulados e suas consequências. É provável, por isso, que estivesse mais interessado em resumir os pontos que considerava mais relevantes do trabalho do estadunidense para o leitor brasileiro. Julgando-o com os olhos do presente, poderíamos dizer que foi evasivo em alguns comentários, porém, sem saber um pouco mais do contexto em que o livro foi publicado e o público para o qual se dirigia, tal avaliação constitui um anacronismo.

Em relação ao percurso de escrita, também é possível notar a indecisão do autor em relação à terminologia em algumas passagens, algo perfeitamente natural quando se produz um texto. Assim vemos que, diferente do Amoroso Costa professor – que, segundo o matemático Felipe dos Santos Reis (1949 *apud* SANTOS, 1971, p. 24), "não errava nem vacilava" –, o Amoroso Costa escritor tinha dúvidas.

Referências

CHEMLA, K. History of science, history of text: an introduction. *In*: CHEMLA, K. (ed.). **History of science, history of text**. Dordrecht: Springer, 2004. p. vii-xxvii.

COSTA, M. A. **As idéas fundamentaes da mathematica**. Rio de Janeiro: Pimenta de Mello, 1929.

EISENSTAEDT, J.; FABRIS, J. C. Amoroso Costa e o primeiro livro brasileiro sobre a relatividade geral. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 26, n. 2, 2004. p. 185-192.

GOMES, R. R. O conceito de número não-arquimediano segundo Amoroso Costa: primeiras impressões de uma pesquisa. *In*: OLIVEIRA, M. N.; GOMES, R. R.; PANTANO FILHO, R. **Matemática e ciências**: ensino, pesquisa e extensão. Salto, SP: Fox Tablet, 2021. p. 49-61.

MONTGOMERY, D. Oswald Veblen. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 69, n. 1, 1963. p. 26-36.

MOREIRA, I. C. Amoroso Costa e a introdução da relatividade geral no Brasil. *In*: COSTA, M. A. **Introdução à teoria da relatividade**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1995. p. xv-xliii.

SANTOS, A. G. Apontamentos para a biografia de Amoroso Costa. *In*: COSTA, M. A. **As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios**. São Paulo: Grijalbo, 1971. p. 17-25.

SILVA, C. M. Politécnicos ou matemáticos? **História, Ciências, Saúde – Manguinhos**, Rio de Janeiro, v. 13, n. 4, p. 891-908, out./dez. 2006.

SILVA, C. P. Manuel Amoroso Costa: o continuador da obra matemática de Otto de Alencar Silva. **LLULL**, v. 23, 2000. p. 91-101.

SIQUEIRA, R. M. Pureza e desinteresse como distinção: as matemáticas entre engenheiros politécnicos na virada do século XIX para o XX. **História Unisinos**, v. 22, n. 4, nov./dez. 2018. p. 534-546.

VEBLEN, O. The foundations of geometry. *In*: YOUNG, J. W. A. (ed.). **Monographs on topics of modern mathematics relevant to the elementary field**. 2nd. ed. New York: Longmans, Green, and Co., 1924. p. 1-51.

O caso da "paternidade" da Geometria e a expropriação do conhecimento produzido na África

Lucilene Cândido Rocha[4]

Wellington Pereira das Virgens[5]

Introdução

"Quem inventou a matemática?". Muitos de nós, professores e professoras de matemática – seja enquanto estudantes ou mesmo durante o exercício da docência – pode já ter ouvido alunos e alunas (geralmente em alguma situação de dificuldade de aprendizagem de matemática) fazendo esta pergunta. Alguém que, eventualmente, tenha a curiosidade de digitar esta pergunta no portal de buscas mais conhecido no Brasil, o Google, vai se deparar com alguns resultados, dentre os quais, o primeiro, que leva a um artigo mantido no repositório da Universidade dos Açores, em Portugal, o qual, ao ser aberto traz a imagem mostrada na Figura 1.

Com exceção de Brahmagupta, matemático indiano – que, na imagem, aparece com traços étnicos caucasianos – todos os outros "pais" de alguma coisa na matemática, segundo o artigo, são brancos, homens e europeus. Acreditamos que, diante da curiosidade sobre "quem inventou a matemática?", um estudante preto que recorra ao Google para sanar sua curiosidade, provavelmente, se encontraria diante de uma triste – e *errada* – conclusão: matemática é coisa de gente branca, já que os "pais" de matemáticas são todos brancos! Infelizmente, essa conclusão não decorre apenas de uma pesquisa superficial e curiosa em um portal de buscas da internet. Essa é a conclusão a que muitos estudantes

[4] Especialista em Educação Matemática e Mestranda em Ensino de Ciências e Matemática no IFSP. Professora da rede pública estadual em Suzano/SP. *E-mail:* candido.lucilene@aluno.ifsp.edu.br

[5] Doutor em Educação. Docente no IFSP – campus São Paulo. *E-mail:* wellington.virgens@ifsp.edu.br

são levados e levadas no decorrer de suas vidas nas cadeiras escolares.

É inegável que todos os personagens históricos representados na figura contribuíram em grande medida para o desenvolvimento da ciência e do conhecimento humano, sendo muito importantes para o desenvolvimento da matemática. Mas poderiam ser os “pais” da matemática? Entendemos que a única forma de reconhecer essa suposta *paternidade* como legítima seria apagando os registros que mostram a matemática se desenvolvendo bem antes desses personagens históricos. É assim que o conhecimento matemático que ajudou a construir, por exemplo, uma das maiores civilizações humanas que já existiu – a civilização africana que ocupou o território do atual Egito – passa a ser considerada como uma matemática *primitiva*.

Figura 1: Os “pais” da matemática?

Fonte: Correio dos Açores – 19 de março de 2015[6]

[6] Disponível em: https://repositorio.uac.pt/bitstream/10400.3/3543/1/Os%20Pais%20na%20Matem%C3%A1tica.pdf. Acesso em: 28 mar. 2022.

Mlodinow (2004), em seu clássico *A janela de Euclides*, defende uma propositura que, ao que parece, converge para este entendimento generalizante de que egípcios e babilônicos (não europeus) *esbarravam* no conhecimento ao acaso, e que suas construções e conhecimento de mundo – e de universo – decorreriam de um movimento incrível de sorte.

> As raízes dos intelectuais *brotaram* nas antigas civilizações da Babilônia e do Egito. Yeats escreveu sobre a indiferença babilônica, uma característica em matemática que *impediu que alcançassem lugar de destaque* (*sic*). A humanidade pré-grega [ou seja, não europeia] tinha noção de muitas fórmulas eficientes, *truques* de cálculo e de engenharia, mas como nossos líderes políticos, eles algumas vezes *realizavam surpreendentes feitos com impressionante pouca compreensão do que estavam fazendo*. Eles nem se importavam com isso. *Eram construtores trabalhando no escuro, tateando, descobrindo o seu caminho, levantando uma estrutura aqui, colocando um piso ali, alcançando o propósito sem jamais ter alcançado a compreensão do processo*. Eles não foram os primeiros. Os seres humanos vêm contando e fazendo cálculos, cobrando impostos e dando troco de menos entre si, bem antes dos tempos históricos registrados. Algumas ferramentas consideradas de computação datadas de 30.000 a.C. podem muito bem ser varas decoradas por artistas com sensibilidades matemáticas intuitivas. Porém, outras são curiosamente diferentes. Nas margens do lago Edward, na atual República Democrática do Congo [na África!], arqueólogos descobriram um pequeno osso, de 8 mil anos, com uma pequeníssima pedra de quartzo presa num entalhe em uma das extremidades. O seu criador – um artista ou matemático nunca saberemos com certeza – entalhou três colunas de cortes em um dos lados do osso. Os cientistas acreditam que este osso, chamado de osso Ishango, provavelmente seja o mais antigo exemplo já encontrado de um dispositivo para registro numérico (MLODINOW, 2004, p. 17, grifos nossos).

Essa longa citação é importante para compreendermos um exemplo do contexto, no qual os conhecimentos que precederam os "*pais das matemáticas"* precisam ser colocados no lugar de *primitivos*, ou seja, de não-matemática. Para tentar *justificar* a relativização da importância, da complexidade ou mesmo o apagamento das contribuições de outros povos para a construção do conhecimento humano, recorre-se a um malabarismo retórico que tende a menosprezar o conhecimento produzido por povos não europeus.

Recentemente, em entrevista a uma revista popular, replicada no portal do IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, o matemático que preside aquela instituição, Marcelo Viana afirmou o seguinte:

> acho muito importante estudar as formas de aplicação da matemática ao longo da história. Mas uma confusão que me parece frequente é a de achar que isso é matemática; ou que fazer esse tipo de estudo faz parte da matemática em si – e isso é uma falácia. O conteúdo da matemática é independente (VIANA, 2021, s/p).

Apesar de chamar de falaciosa a defesa de uma matemática vinculada aos contextos culturais de sua própria produção, Viana (2021) faz questão de salientar que "ninguém sabe direito quem descobriu o Teorema *de Pitágoras*, mas ele era conhecido na Mesopotâmia, 1800 a. C.; e foi 'redescoberto' *e tornado famoso* pelo próprio Pitágoras, *que era grego, mil anos depois*" (VIANA, 2021, s/p, grifos nossos). Ora, se, como afirma Viana (2021), o conhecimento da relação existente entre os lados de um triângulo retângulo "não é mesopotâmio, não é grego, não é francês, não é africano" então porque não chamamos de "Teorema Africano" ou "Teorema Egípcio" ou "Teorema Babilônico", já que era conhecido nessas regiões mais de mil anos antes de Pitágoras? A suposta *paternidade* do teorema que, no contexto da estrutura social eurocêntrica e racista, atribuímos a Pitágoras tem razão direta com a defesa da necessidade de desconstrução *de práticas* *de ensino* e acabam por apagar as contribuições daqueles povos que são os verdadeiros *pais e mães* dos conhecimentos.

É a esse movimento de apagamento histórico das contribuições de povos africanos e do povo preto, durante as práticas de ensino, que, a exemplo de Santos (2014), chamamos de epistemicídio. E é o combate ao epistemicídio que defendemos ao propor práticas de ensino que coloquem a cultura e a história africana no centro da atividade de ensino (LEONTIEV, 1978) e que sirvam de inspiração para a elaboração de situações desencadeadoras de aprendizagem (MOURA, 2010). Constituem processos de epistemicídio aquelas práticas de ensino que consideram *primitivas* as produções de povos não europeus – especialmente, os povos africanos – e enaltecem uma suposta supremacia dos conhecimentos produzidos em contextos eurocêntricos.

Para Shiva (2017, p. 27),

> a definição do cristianismo como única religião, e de todas as outras crenças e cosmologias como primitivas, encontra seu paralelo na definição da ciência ocidental mercantilizada como única ciência, e todos os outros sistemas de conhecimento como primitivos.

No contexto dos estudos e das práticas de ensino de matemática, podemos considerar *epistemicidas* aquelas que enfatizam a importância e o valor cultural de conhecimentos quando se entende que estes tenham sido produzidos em contextos eurocêntricos, enquanto aqueles produzidos em outros contextos, por outros povos, não europeus, seriam representativos de conhecimentos *primitivos.*

A ideia de enaltecer as produções europeias como *verdadeira ciência* e rotular as contribuições de outros povos como *primitivas* é uma prática racista (MOORE, 2007). E, considerando que essa prática racista não seja a intensão consciente do professor ou da professora de matemática em suas aulas, significa que o racismo está impregnado na estrutura do processo de produção e consolidação do conhecimento, ou seja, o racismo existente na produção do conhecimento matemático que contamina também as práticas de ensino dessa ciência é um racismo estrutural, assim entendido aquelas práticas racistas impregnadas na estrutura constitutiva da sociedade, como propõe Almeida (2019).

Consideremos, a título de exemplo, uma prática epistemicida relacionada ao racismo estrutural que naturaliza situações que precisam ser problematizadas: podemos supor, considerando a obrigatoriedade dos estudos de História da Matemática durante a formação inicial de professores de matemática (BRASIL, 2002), que a grande maioria dos professores de matemática já ouviu falar do Papiro de Rhind. A experiência atuando em cursos de licenciatura em matemática nos leva a concluir que um número muito menor já ouviu falar do Papiro de Ahmes. Menos pessoas ainda sabem que ambos são, na verdade, o mesmo documento histórico. De acordo com Pinheiro e Oliveira (2019).

> o papiro de Rhind ou papiro de Ahmes é um documento egípcio de cerca de 1.650 a.C., onde um escriba de nome Ahmes detalha a solução de 85 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria. O papiro foi *roubado* pelo escocês Alexander Henry Rhind, de Aberdeen, em Luxor no Egito, em 1858. O Museu *britânico* incorporou-o ao seu patrimônio em 1865, permanecendo em seu acervo até os dias atuais (PINHEIRO; OLIVEIRA, 2019, p. 6).

Rhind, portanto, foi um escocês (europeu) que se apropriou do documento escrito pelo escriba egípcio (africano) Ahmes. Rhind, o europeu, é mais frequentemente associado à ideia de *dono* do documento histórico, que é muito relevante para o reconhecimento dos processos históricos de produção de conhecimento matemático humano, do que aquele que, de fato, o produziu: um africano. O papiro, objeto histórico que sintetiza aspectos do conhecimento produzido no Egito, na África, faz parte do patrimônio do Museu Britânico, na Europa.

Este é um entre tantos exemplos que nos levam à compreensão de que nossa sociedade atual atribui uma centralidade à produção de conhecimentos que precisa ser problematizada em benefício do reconhecimento acerca de uma produção cultural e de conhecimentos humana, construída através de contribuições de outros muitos povos e sujeitos não-europeus e que acabam sendo postos em segundo plano quando se busca educar – ensinar e aprender – sobre os processos de constituição dos saberes humanos.

Um outro exemplo, mais relevante para nós na pesquisa que contextualiza este recorte, surge quando verificamos, nas práticas de ensino e de aprendizagem, uma homenagem que atribui ao grego (europeu) Euclides de Alexandria[7] o título de "pai da geometria". É a este outro exemplo que dedicamos a discussão apresentada a seguir, que serve como uma espécie de *"teste de DNA"* que visa avaliar a suposta *paternidade* de Euclides em relação à Geometria.

O processo de apagamento da geometria dos povos pretos

A geometria que domina o currículo de matemática a ser ensinada durante a educação básica é chamada de *geometria euclidiana*. Isso porque remete aos conhecimentos a partir dos quais a geometria ocidental foi construída e que adota o método empregado por Euclides para escrever seu mais famoso livro, *os Elementos*: o método axiomático-dedutivo. Trata-se de, partindo de premissas, em tese, óbvias (os axiomas) construir, por dedução, a demonstração de uma série de proposições (teoremas) que passarão a servir de estrutura para demonstrar outros teoremas ainda mais

[7] Apesar de a cidade de Alexandria estar geograficamente localizada no atual território egípcio – na África, portanto – foi fundada por Alexandre Magno e estava sob domínio do que a história hegemônica chama de "mundo grego".

complexos (tornando-se lemas) e possibilitarão resolver todos os tipos de situações (problemas).

Os Elementos é a obra, cuja autoria é atribuída a Euclides, que compila todas as demonstrações e conhecimentos geométricos de seu tempo, que são necessários para a construção, usando apenas uma régua não graduada e um compasso, dos cinco sólidos platônicos (BICUDO, 2009). A história da matemática já mostrou não ser razoável a ideia segundo a qual *Os Elementos* tenha sido escrita por uma só pessoa. Bicudo (2009) indica que diversos "discípulos" de Euclides, ao se depararem com erros, dificuldades ou mesmo durante os processos de cópia que antecederam o surgimento da imprensa, acrescentaram, modificaram ou suprimiram partes de *Os Elementos*, fazendo com que a obra que chegou aos nossos dias seja, na verdade, uma produção de diversas mentes atribuídas a um personagem histórico único.

Apesar dessa suposta *paternidade* da geometria ser atribuída a Euclides, o historiador Heródoto, citado por Caraça (1951), apresenta a seguinte origem para as ideias que estão na gênese do conhecimento geométrico:

> Disseram-me que este rei (Sesóstria) tinha repartido todo o Egito entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e retangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio (Nilo), ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviava medidores ao local e fazia a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que lhe tivesse ficado de terra. *Eu creio que foi daí que nasceu a Geometria e que depois passou aos gregos* (CARAÇA, 1951, p. 32, grifos nossos).

Verificamos que, de acordo com Heródoto, portanto, a *paternidade* da geometria seria africana, já que só depois dos egípcios é que os europeus se apropriaram e passaram a estudar a geometria. Bicudo (2009), em sua importante tradução de *Os Elementos* para língua portuguesa, traz uma apresentação em que destaca um trabalho intitulado *História da Geometria*, escrito por Eudemo, que teria sido um dos mais importantes discípulos e colaboradores de Aristóteles. Nessa obra, Eudemo, reconhecendo a geometria produzida originalmente pelos egípcios, indica que:

> Tales [de Mileto], *primeiramente tendo ido ao Egito, transportou para a Grécia essa teoria [a geometria]* e, por um lado, descobriu muitas coisas, e, por outro lado, mostrou os princípios de muitas para os depois dele, aplicando-se a umas de modo mais geral, a outras, de modo mais sensível (BICUDO, 2009, p. 38, grifos nossos).

Assim, segundo Eudemo, Tales aprendeu muitas coisas em sua viagem ao Egito e levou tais conhecimentos para a Grécia contribuindo para os que vieram depois dele. Para atenuar essa contradição – sobre a *paternidade* da geometria ser euclidiana (europeia) e não egípcia (africana), apesar das evidências – o mais comum nos processos de formação de professores de matemática atualmente é que haja uma relativização sobre a importância e a complexidade do conhecimento geométrico produzido pelos egípcios em relação ao conhecimento – supostamente pleno – que se verificaria a partir de *Os Elementos*. Em outras palavras, para fugir da contradição, pratica-se o epistemicídio.

O próprio professor Irineu Bicudo, na referida apresentação de sua tradução de *Os Elementos*, trata de apresentar uma relativização do conhecimento produzido fora da Europa com uma anacrônica comparação de complexidade, ao afirmar, por exemplo, que "um dos capítulos mais importantes da história cultural, embora pouco conhecido, é a transformação do *primitivo* conhecimento matemático empírico de egípcios e babilônios na ciência matemática grega, *dedutiva***,** *sistemática***,** *baseada em definições e axiomas*" (BICUDO, 2009, p. 83, grifos nossos). O professor Bicudo (2009) evoca Bourbaki (1984, p. 9, *apud* BICUDO, 2009, p. 83), o qual teria defendido que

> Não há, hoje, qualquer dúvida de que existiu uma matemática pré-helênica bem desenvolvida. Não somente são as noções (já mais abstratas) de número inteiro e de medida de quantidade comumente usadas nos documentos mais antigos que nos chegaram do Egito e da Caldeia, mas a álgebra babilônia, por causa da elegância e segurança dos seus métodos, não deve ser concebida como uma simples coleção de problemas resolvidos por um tatear empírico.

A evocação, no entanto, é feita para que o professor Bicudo (2009) possa discordar, afirmando que

> No entanto, não encontramos, seja nos documentos egípcios seja nos babilônios, que nos chegaram aos milhares, qualquer esboço do que se assemelhe a uma "demonstração", no sentido formal do conceito. A noção de ciência dedutiva era desconhecida dos povos orientais da Antiguidade. Os seus textos matemáticos mostram-se, em que pese o afirmado por Bourbaki, como uma coletânea de problemas, mais ou menos interessantes, e as suas soluções, em forma de uma receita prescrita, como as indicações das etapas de um ritual oferecido a uma deidade. Nada de definições, nada de axiomas, nada de teoremas! Sobre tais coisas repousa a sombra! (BICUDO, 2009, p. 83).

Contraditoriamente, no entanto, o próprio professor Irineu reconhece as razões para que algumas obras tenham resistido ao tempo e tenham chegado aos nossos dias, enquanto outras caíram no esquecimento.

> Ora, quando se tem em mente a dificuldade na confecção de cópias manuscritas, se um tratado trouxesse de forma bem posta e melhorada o que outros continham, passava-se, com vantagens, a copiar aquele em detrimento destes. Desse modo, o tempo fez com os trabalhos dos demais o que não conseguiu com os Elementos de Euclides: eliminou-os quase que totalmente da memória dos homens (BICUDO, 2009, p. 41).

Com isso podemos supor, com razoabilidade, ser pouco provável que os egípcios encontrassem, como obra do mero acaso, situações que sustentassem a grandiosidade daquilo que construíram, sem alguma sustentação teórica e que coube exclusivamente aos gregos a demonstração e definição daquilo que os egípcios, em seu conhecimento *"primitivo"* – nas palavras de Bicudo (2009) – ignoravam. Também não parece razoável, a partir do que nos apresenta o historiador Eudemo, citado pelo próprio Bicudo (2009), que tenha cabido a Euclides e seus discípulos, exclusivamente, a criatividade da qual decorre a criação da geometria axiomática que chegou até nós, já que Euclides tem como uma de suas referências Tales, o qual, por sua vez, aprendeu com os egípcios. Além do que, como também o próprio professor Bicudo (2009, p. 41) indica, "a dificuldade na confecção de cópias manuscritas", diante da possibilidade de se copiar *Os Elementos* – obra que compilava uma série de conhecimentos – pode ter contribuído para que os papiros e outras referências às produções egípcias que pudessem ter inspirado Euclides (a partir de Tales e de outros) fossem eliminadas "quase que totalmente da memória dos homens".

Ainda diante na ânsia de justificar a geometria euclidiana como a "verdadeira" geometria, Bicudo (2009) indica que

> Tanto no Egito quanto na Mesopotâmia, era a classe sacerdotal a detentora do conhecimento. Ora, os sacerdotes punham-se de intermediários entre a deidade e o povo. Os desígnios da divindade não carecem de explicações; seus desejos devem ser satisfeitos com os rituais que, aplacando-lhe a ira, lhe atrai o beneplácito. É função dos sacerdotes interpretar a vontade dos deuses, guiando o povo nos passos do rito apaziguador (BICUDO, 2009, p. 84).

Ainda que, de fato, a sociedade egípcia tenha se fundado em grande medida em preceitos de uma mitologia politeísta, a história mostra que na sociedade grega não foi sido diferente. Se no Egito o conhecimento não estava acessível a todos, tão pouco na Grécia qualquer um poderia ser considerado cidadão, frequentar as instituições de ensino ou mesmo apresentar-se ao debate público de ideias ou acessar obras *como Os Elementos*. O fato de o conhecimento não ser público não implica que ele não existia tanto na Grécia quanto no Egito antigos.

A geometria (e os objetivos do processo de aprendizagem) que podemos inferir disso remetem à ideia do surgimento de um conhecimento filosófico e não necessariamente pragmático. Se pudermos contribuir, fazendo humor, na discussão a respeito da paternidade da geometria, ousaríamos dizer, talvez, que os egípcios africanos são os verdadeiros pais da geometria, cabendo a Euclides um papel mais próximo do de um "tio" que teria proposto o que poderíamos, certamente, chamar de geometria filosófica. *Euclides seria, então, o tio da geometria.*

A defesa de que a geometria euclidiana, ou seja, aquela que reconhecemos a partir das contribuições de Euclides, em *Os Elementos*, seja fundamental para entender as formas e as leis geométricas do mundo que nos rodeia esconde, na verdade, a constatação de que a sociedade *ocidental*, à qual costumamos atribuir o rótulo de "o mundo", ou ainda "o mundo civilizado", fundamentou suas construções geométricas, basicamente naquilo que Euclides sintetizou em *Os Elementos*. Então, é uma inversão dizer que a geometria euclidiana explica o mundo, já que por "mundo" estamos reconhecendo apenas as produções ocidentalizadas e eurocêntricas dos homens que se fundam naquela geometria. É nesse contexto que Eglash (2005) apresenta uma crítica importante à geometria euclidiana:

> A geometria fractal *versus* não fractal ("euclidiana") não implica em bom versus mau. Por outro lado, as pessoas investem em formas abstratas com significados locais particulares. Para dar um exemplo polêmico, decisões recentes da Suprema Corte dos EUA declararam que os distritos eleitorais não podem ter formas "bizarras" ou "altamente irregulares", e vários contornos fractais foram substituídos por linhas retas de forma euclidiana. Se os padrões de assentamento fractal são tradicionais para os afrodescendentes e os padrões de assentamento euclidiano para os europeus, é etnocêntrico insistir apenas nas divisões

> euclidianas dos distritos eleitorais? (EGLASH, 2005, p. 8, tradução nossa[8]).

Entendemos que estes são fortes indícios de que a cultura ocidental tende a reconhecer como "estranho" aquilo que foge de suas tradições culturais, de modo que formas não contempladas por uma geometria euclidiana passam a ser rotuladas, como indica Eglash (2005) como "irregulares" e "bizarras". Se, nesse contexto, afrodescendentes acabam não se reconhecendo como produtores de conhecimento, então eles e elas passam a uma condição de alienação diante da sociedade e da ciência. Essa condição, evidentemente, precisa ser superada e o primeiro passo para isso entendermos ser o reconhecimento dos mais diversos aspectos da diáspora africana em nossa cultura ocidental, de modo geral, e brasileira, de modo particular.

Conclusão

Neste texto buscamos colocar em discussão o processo de epistemicídio que tende a invisibilizar a produção de conhecimento matemático não europeia e como esse processo pode ser alienante e colocar estudantes negros no lugar de não produtores de conhecimento nas aulas de matemática. Mas há como superar esse tipo de prática? Considerando o conceito de racismo estrutural (ALMEIDA, 2019) essa é uma árdua tarefa, mas, devemos salientar, absolutamente necessária. E uma das formas de superar essa perspectiva, apesar de a Base Nacional Comum Curricular

---

[8] *Fractal versus nonfractal ("Euclidean") geometry does not imply good versus bad. On the other hand, people do invest abstract forms with particular local meanings. To take a controversial example, recent U.S. supreme court decisions declared that voting districts cannot have "bizarre" or "highly irregular" shapes, and several of these fractal contours have been replaced by the straight lines of Euclidean form. If fractal settlement patterns are traditional for people of African descent, and Euclidean settlement patterns for Europeans, is it ethnocentric to insist on only Euclidean voting district lines?*

(BRASIL, 2018), por exemplo, apresentar conteúdos curriculares de geometria apenas relacionados à chamada geometria euclidiana, é entender que a formação inicial e continuada de professores deve estar voltada para o desenvolvimento intencional da Atividade Orientadora de Ensino - AOE (MOURA, 2010), já que esta pode ser realizada a partir de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem – SDA (MOURA, 2010), que apresentem perspectivas afrocêntricas. A organização de AOE, nessa perspectiva, seria uma importante contribuição para a promoção de uma formação antirracista. Os objetos geométricos – não euclidianos – que também podem contribuir para essa superação são os fractais.

Eglash (2005) indica que a geometria presente no continente africano não se restringe ao que chamamos de geometria euclidiana. Outras geometrias estão presentes e são muito importantes para a compreensão e organização daquelas sociedades. O mesmo autor destaca a presença e a importância da geometria fractal no continente-mãe – a África – e sobre como os povos africanos organizam sua sociedade considerando também geometrias não euclidianas – como a fractal.

Segundo Barbosa (2007), no livro *Descobrindo a Geometria Fractal: para a sala de aula*, os fractais são objetos matemáticos, da mesma forma que uma circunferência, um quadrado ou um triângulo. Apesar disso os fractais não são uma forma, mas sim um conceito. Eles não possuem existência concreta, mas muitos fenômenos ao nosso redor podem ser compreendidos e explicados a partir deles, de forma a conseguirmos prever os seus padrões, apreciar sua beleza e intuir sobre outros conceitos complexos da matemática, como o infinito.

Podemos encontrar a geometria fractal sendo aplicada nas áreas de Ciências, Tecnologia, Artes e Física, dentre outras. Os fractais estão presentes em cartões fractais tridimensionais, na teoria do caos, na tecnologia digital e de comunicação, nas artes e, principalmente, na natureza. A geometria fractal, presente na organização social de vários povos africanos pode – e deve – inspirar o trabalho docente para a compreensão de conceitos geométricos – euclidianos ou não. É o que nossa pesquisa de mestrado, da qual fizemos este recorte, mostra.

Mas, do mesmo modo como o próprio conhecimento geométrico não brota na cabeça de ninguém, como se fosse uma planta, o conhecimento necessário para que o professor e a professora tratem do conhecimento matemático, de modo geral, e geométrico, em particular, a partir de metodologias e perspectivas antirracistas é necessário um processo formativo consciente e direcionado para tal objetivo. Caso contrário, o risco maior é o de continuarmos reproduzindo práticas tradicionais que invisibilizam por completo a cultura africana e as produções dos povos negros. Seja evidenciando aquilo que foi produzido conscientemente pelos povos africanos – como propõe e mostra Eglash (2005) – seja aproveitando oportunidades em contextos distintos e, talvez, involuntários presentes nas artes, dança, arquitetura ou outros aspectos de cultura africana, precisamos colocar em evidência, em nossas salas de aula, que os povos negros também são produtores de cultura e conhecimento.

Referências

ALMEIDA, S. L. de. **O que é racismo estrutural?** Belo Horizonte (MG): Letramento, 2018.

BARBOSA, R. **Descobrindo a Geometria Fractal**. 3ª. ed., Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BICUDO, I. **Prefácio e introdução.** EUCLIDES. Os Elementos. Trad. de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. Parecer CNE/CES 1.302/2001. Diário Oficial da União, Seção 1, p. 15, de 5 de março de 2002. 2002.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC/CNE, 2018.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da matemática.** Lisboa: Fotogravura Nacional, 1951.

EGLASH, Ron. **African Fractals**: modern computing and indigenous design. New Brunswick, NJ: Rutgers University Press, 2005.

LEONTIEV, A. **O desenvolvimento do psiquismo.** Lisboa: Horizonte, 1978.

MLODINOW, L. **A janela de Euclides**. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

MOORE, C. **Racismo e sociedade**: novas bases epistemológicas para entender o racismo. Belo Horizonte: Mazza, 2007.

MOURA, M. O. Atividade Orientadora de Ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. **Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 10, n. 29, jan-abr. 2010. p. 205-229.

PINHEIRO, B. C. S.; OLIVEIRA, R. D. V. L. de. Divulgação... de qual ciência? Diálogos com epistemologias emergentes. *In*: ROCHA, M. B.; OLIVEIRA, R. D. V. L. de (*orgs*). **Divulgação científica**: textos e contextos. São Paulo: Livraria da Física, 2019. p. 1-11.

SANTOS. B. de S. **Justicia entre saberes: Epistemologías del Sur contra el epistemicídio**. Madrid (ES): Ediciones Morata, 2014.

SHIVA, V. **Biopirataria**: a pilhagem da natureza e do conhecimento**.** Petrópolis: Vozes, 2017.

VIANA, M. À Gazeta, Viana questiona ‘descolonização da matemática’. **Revista Gazeta**. In: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (portal). Disponível em: https://impa.br/noticias/a-gazeta-do-povo-viana-questiona-descolonizacao-da-matematica. Acesso em: 30 mar. 2022.

A estatística básica e sua importância para compreender a ciência

Apolo Rubens de Camargo[9]

Introdução

O cenário educacional exige cada vez mais práticas pedagógicas que resultem em adultos críticos e cientes das ações do homem e de suas consequências. Conforme exposto por Camargo (2016), no campo do ensino da estatística, o conjunto de práticas de ensino intitulado de inferência informal é uma das alternativas para introdução dos conceitos fundamentais da inferência estatística, visto que essa prática busca o desenvolvimento dos conceitos e das habilidades com o objetivo de tornar os alunos capazes de organizar, interpretar, representar e inferir de forma coerente, utilizando dados estatísticos.

De acordo com Ben-Zvi e Garfield (2004), a maioria das escolas oferece o conteúdo de estatística por meio de técnicas algorítmicas e acaba formando alunos que, apesar de calcular medidas e de aplicar os métodos estatísticos, não conseguem interpretar os resultados obtidos, nem fazer inferências. Diante dessa prática, os autores propõem o desenvolvimento da inferência informal por meio de problemas e situações que auxiliem os alunos a compreenderem os fenômenos científicos, sociais, econômicos e climáticos.

Crescimento do interesse e da necessidade da estatística

É somente na década de 1970 que a estatística foi reconhecida como uma ferramenta importante para tomada de decisão em diversas áreas do conhecimento, e alguns autores, como

[9] Mestre em Educação Matemática pela USP. Professor de matemática na rede particular de educação. *E-mail*: apolo@chalababa.com.br

Batanero *et al* (2001), por exemplo, classificaram-na como uma ciência.

Entre outras orientações, encontramos na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) que não se pode dispensar o conhecimento da estatística sem abdicar de algumas coisas questões, entre elas a consciência sobre as ações individuais e coletivas.

Para Campos *et al* (2011), a educação estatística contribui para a formação de um sujeito globalizado com responsabilidade ambiental, pois a estatística viabiliza a compreensão das ações do homem sobre o clima, incentivando o aluno a assumir uma postura crítica e reflexiva diante das informações disponíveis.

Transformar dados em informações e perceber aspectos antes despercebidos fazem parte de qualquer pesquisa científica. Como ferramenta, a estatística fornece mecanismos para interpretar dados e para tomada de decisões em situações de incerteza.

A passagem da parte para o todo, ou seja, da amostra para a população, caracteriza a inferência estatística e sua crescente importância no cenário educacional. Acompanhando esse crescimento surgem também as dificuldades, tanto por professores quanto por alunos em aprender e ensinar conceitos básicos relacionados à estatística.

O que é um conceito

Segundo Severino (2007), um conceito pode ser representado linguisticamente por um termo ou palavra. A compreensão de um conceito pode ser manifestada pelo domínio de um conjunto de características específicas, relacionadas ou não, que auxiliam no entendimento do objeto pensado.

De acordo com Ferreira (2000), "conceito" remete em sua origem etimológica à "coisa concebida" e "formada na mente". Um conceito também pode ser algo que se concebe no pensamento sobre algo ou alguém. É a forma de pensar sobre algo, uma opinião manifesta, um símbolo mental, um conjunto de características comuns que determinam como as coisas são.

De acordo com Burrill e Biehler (2011), podemos considerar como alguns dos alicerces da estatística os seguintes conceitos: dados, variação, distribuição, representação, relações entre variáveis, planejamento e coleta de dados, amostra e inferência.

Embora existam diferenças entre autores do que seja considerado um conceito, existem conceitos comuns, se podemos assim chamar, que são indispensáveis para o desenvolvimento de qualquer assunto relacionado à estatística. Quando a estatística é tratada como parte da matemática, sobra pouco espaço para desenvolver o pensamento e o raciocínio estatístico.

Sobre os conceitos fundamentais, Machado (2009) descreve duas características inerentes a eles: a) articulam várias partes de um tema; b) transbordam os limites de um tema possibilitando a conexão com outros temas.

Erros conceituais

Algumas dificuldades e erros conceituais são mais comuns que outros e, por isso, os professores podem se preparar antecipadamente para enfrentá-los. Segundo Batanero (2001), quando se trata de conceitos estatísticos, o mesmo fenômeno ocorre. Existem erros que costumam ser comuns nos primeiros contatos com a estatística, como não usar intervalo de classes para tabular dados ou utilizar escalas diferentes para elaborar gráficos, mas esses erros não são conceituais. Diante de um problema estatístico, é possível abordar um ou mais conceitos, dependendo dos conhecimentos que os alunos apresentam e de acordo com as intenções do professor.

No campo da educação estatística, Pfannkuch *et al* (2010) afirmam que os erros conceituais dos alunos na elaboração de conclusões sobre um conjunto de dados estão relacionados à verbalização e à escrita dos argumentos utilizados para justificar afirmações. Sabemos que não há uma regra geral que possa ser aplicada à classes e que resolva todas as dificuldades, mas existem características comuns encontradas entre os alunos, independentemente da idade e do país, e que são objeto de pesquisa ligada aos processos de ensino e aprendizagem.

Quando existe um erro conceitual, o aluno faz tentativas, à sua maneira, construindo uma lógica própria para encontrar a solução. Diante disso, o professor pode identificar, mediante a observação e o diálogo, como e o que o aluno está pensando. Dessa maneira, é possível levantar evidências do que não foi compreendido e auxiliá-lo, pois existem diferentes fatores que podem gerar um erro.

Vejamos alguns erros de natureza epistemológica dentro do ensino da matemática:

- $1/5 + 1/4 = 2/9$
- $(a + b)^2 = a^2 + b^2$
- $2^3 + 2^5 = 2^8$

Dentro do ensino de estatística, os erros de natureza epistemológica podem ser exemplificados por:

- Concluir que a média da população é igual a 3 porque a média da amostra é igual a 3;
- Pensar que não rejeitar que dois grupos tenham médias iguais significa que os dois grupos têm médias iguais;
- Considerar H_a verdadeira após descartar H_0.

O que é estatística

De acordo com Hand (2008, p. 2), a estatística "(...) é a tecnologia para extrair significado dos dados. (...) é a disciplina chave para conjecturar o futuro ou para fazer inferências sobre o desconhecido ou para produzir sumários convenientes de dados."

Em um sentido mais científico, Magalhães e Lima (2011, p. 1) descrevem a estatística como "um conjunto de técnicas que permite de forma sistemática organizar, descrever, analisar e interpretar dados oriundos de estudos ou experimentos realizados em qualquer área do conhecimento.”

Batanero (2001) chama a atenção para o fato de alguns autores considerarem o termo "aleatoriedade" ligado a várias ideias e mostra algumas classificações que podem ser aplicadas aos fenômenos aleatórios, a saber, aqueles em que os resultados são equiprováveis; os que têm múltiplas possibilidades; a aleatoriedade como falta de causalidade; como incerteza ou ainda como parte de modelos matemáticos nos quais estão apoiados alguns procedimentos estatísticos.

Dados

Dados estatísticos são informações coletadas que servem como base para um estudo estatístico. Eles podem ser obtidos por meio de observações documentadas, resultados de uma medição ou de outras formas.

Quando apresentados de forma sintética e organizada são classificados simplesmente como dados. Os dados coletados em seu estado original, sem qualquer tipo de organização sistemática, são considerados dados brutos.

De acordo com Hand (2008), os dados estatísticos são tipicamente números resultantes de contagens, de mensurações ou de outros processos. Para ele, a importância dos dados se justifica por sua função de representar. O processo de transformar as informações de um problema em números é a etapa inicial de qualquer estudo estatístico. Em outras palavras, gerar dados significa encontrar uma representação numérica para o que se deseja estudar para, então, fazer um estudo estatístico sobre as características, tendências e informações percebidas por meio dos números e que não foram percebidas por meio de uma representação não numérica.

A utilização e a escolha dos procedimentos para organizar e descrever dados dependem de algumas características que estes apresentam. De acordo com Magalhães e Lima (2011), os dados podem ser classificados em dois grandes grupos: numéricos e não numéricos. Essa distinção se reflete no emprego dos termos quantitativo e qualitativo, respectivamente.

População e amostra

Para Moore (2000), a expressão "parte dos elementos" merece cuidado ao ser tratada, pois é responsável por alguns erros conceituais encontrados entre as pessoas que estudam ou ensinam estatística.

Uma amostra é qualquer subconjunto não vazio formado por elementos da população em estudo. Além do número de elementos, a qualidade da amostra também tem diversas implicações em todas as etapas que sucedem a sua coleta e, por isso, é de fundamental importância para não comprometer a análise dos dados.

Examinar amostras é algo presente em algumas situações cotidianas. É o que acontece quando se verifica a quantidade de sal em um alimento ou em testes para fraude em combustível. Com uma pequena amostra é possível obter indícios de como está o todo. Nesses casos, as amostras preservam fortemente as mesmas características e proporções da população devido à homogeneidade encontrada, o que torna dispensável a análise de toda a população.

Essa homogeneidade também facilita estender as conclusões obtidas sobre a amostra para a população. Existem casos em que as características a serem observadas da população em estudo, ao invés de terem o comportamento homogêneo citado no parágrafo anterior, apresentam heterogeneidade, que geralmente é refletida na amostra e que exigirá uma análise mais cuidadosa. Como o interesse de uma pesquisa é sobre os aspectos populacionais, é comum fazer afirmações, julgamentos, conclusões sobre populações, utilizando informações extraídas de uma amostra.

Quando obtemos uma amostra a partir de um procedimento aleatório sabemos que os diferentes resultados gerados pelas diferentes amostras seguem as leis da probabilidade. A partir desse fato, é possível calcular a probabilidade dos erros que podem ser cometidos ao se estender conclusões de uma amostra para a população.

Em inferência, uma das principais ideias é que uma amostra forneça informações sobre a população. Para entender as propriedades fundamentais dos processos de amostragem, é necessário encontrar um equilíbrio na relação entre dois outros conceitos: variabilidade e representatividade da amostra.

De acordo com Sotos *et al* (2007), dois erros conceituais ligados à compreensão da representatividade da amostra, que costumam conduzir a conclusões enganosas e interpretações equivocadas, são:

- a falsa intuição de que uma amostra sempre apresenta as mesmas características da população de onde foi coletada. Isso não é necessariamente verdade, mas pode ocorrer;
- a crença de que duas amostras quaisquer de uma mesma população são iguais ou muito parecidas entre si, o que também não é necessariamente verdade.

Medidas descritivas da estatística

Os dados são a matéria-prima da estatística e se referem a características de interesse do estudo e/ou das pesquisas. As medidas descritivas em estatística, também chamadas de medidas resumo, dizem respeito a como descrever os dados de natureza quantitativa (variáveis quantitativas) por meio de números.

De acordo com Moore (2000), as várias medidas constituem um tipo de ajuda para obter respostas e não carregam em si as respostas propriamente ditas. As decisões dependem dos critérios adotados por cada um.

Existem muitas medidas descritivas que são usadas em diversas situações. Porém, para descrever uma distribuição, é aconselhável incluir uma medida de posição e uma medida de variabilidade. Para Magalhães e Lima (2011), as medidas descritivas sumarizam as informações disponíveis e facilitam a percepção de algumas características sobre o comportamento dos dados.

Entre essas medidas, conhecidas como medidas de posição, destacam-se a média, a mediana, a moda, os quartis e os percentis. As medidas conhecidas como de dispersão tendem a resumir os dados observando as diferenças numéricas entre eles ou as distâncias em relação a alguma referência. Entre elas, as mais comuns são a amplitude, o intervalo interquartil, a variância e o desvio padrão. Todas podem ser calculadas por meio de operações matemáticas elementares.

Recursos gráficos

A elaboração de tabelas e de gráficos depende diretamente dos dados. Um dos tipos de gráficos mais difundidos é a série temporal, também chamada de gráfico de linhas. Nele, os dados são observados ao longo do tempo e representados em uma escala no eixo horizontal. Tanto a ciência quanto a mídia utilizam dados organizados em gráficos para defender argumentos dos mais diversos temas.

Por meio do gráfico adequado, é possível identificar a existência de um padrão de distribuição, visualizando seu centro, a dispersão dos dados e alguma tendência, caso exista, além de mostrar simetria, tendência, valores discrepantes e indícios sobre variabilidade.

Para Pfannkuch e Horton (2009), gráficos simples, como o de pontos (*dot plot*), com dados coletados entre os alunos, são os mais indicados para abordagens iniciais, já que cada um se identifica com um ponto do gráfico e este passa a fazer sentido para os alunos.

Apesar de não apresentar diretamente as medidas descritivas, o gráfico de pontos representa os dados de modo a revelar simultaneamente características tanto individuais quanto coletivas. No gráfico de pontos, é possível extrair informações visuais sobre a variabilidade dos dados, sobre seus extremos, sobre padrões que se repetem, crescimento, decrescimento, ocorrências gerais e particulares, entre outras possibilidades.

Um gráfico muito importante, mas pouco presente nos materiais didáticos brasileiros, é o gráfico de caixa (*box plot*). Esse gráfico utiliza, para sua elaboração, cinco das principais medidas descritivas que são ensinadas na escola básica: o primeiro quartil, o segundo quartil ou mediana, o terceiro quartil, o máximo e o mínimo. A elaboração e interpretação de um gráfico de caixas é uma das habilidades esperadas de um aluno no final do ensino básico.

Diferenças e semelhanças entre estatística e matemática

A organização curricular atual propõe uma estrutura na qual a estatística parece ser uma parte da matemática. Isso transmite a falsa ideia de que ambas as disciplinas teriam um desenvolvimento didático/pedagógico muito semelhante. De fato, existem semelhanças entre elas. Porém, alguns aspectos estão sempre presentes na estatística, como a aleatoriedade e a incerteza que se opõem ao determinismo da matemática.

A estatística busca extrair informações de dados, quantitativos (numéricos) e qualitativos (não numéricos), e não apenas organizá-los. Os dados trazem junto com seu valor numérico informações adicionais reveladas pelo contexto no qual estão inseridos. Assim, os dados, o contexto e os conhecimentos gerais de quem manipula os dados se traduzem em informações, compondo um cenário e imprimindo significados que extrapolam os números.

Quando a estatística é tratada como uma parte da matemática, em livros didáticos e em documentos normativos, surge uma forte tendência de que os professores enfatizem os cálculos e a mecanização nas aulas de estatística. Fazer experimentos, coletar dados, organizá-los, analisá-los considerando a influência da variabilidade na experiência que se tem para perceber os desdobramentos desse assunto e tomar uma decisão considerando a incerteza de um fenômeno são ações que contêm uma parte subjetiva que também pode ser contraposta ao determinismo da matemática.

Inferência informal

Usaremos o nome inferência informal para distinguir uma prática pedagógica, crescente dentro da educação estatística, e que surge devido à necessidade de combater as práticas pedagógicas que dão ênfase à mecanização dos procedimentos estatísticos. A inferência informal busca maneiras mais eficientes para introduzir os conceitos fundamentais e algumas ideias, utilizadas na estatística, que se apresentam, dentro do senso comum, de difícil entendimento imediato.

As dificuldades, às vezes, acabam por gerar um desconforto, tanto em alunos quanto em professores, quando estes optam por adotar um ensino mecanizado que privilegia o tecnicismo e a aplicação pura e simples de procedimentos. Os conhecimentos acumulados por meio da inferência informal possibilitam aos alunos meios não formais de afirmar, alegar, julgar ou questionar algo, alguma situação, também baseados em amostras.

A quantidade de evidências que um aluno consegue enxergar e descrever bem como a quantidade de elementos que consegue relacionar para obter evidências que justifiquem as inferências feitas depende do conhecimento do aluno e não da sua idade propriamente dita. Assim, espera-se que alunos mais experientes apresentem uma maior quantidade de evidências estatísticas bem como um vocabulário com termos estatísticos ligados às ideias fundamentais da estatística.

Distribuição amostral

A distribuição amostral é um conceito indispensável quando se trata de inferência estatística. Ela é a base dos testes de hipóteses. Sua importância provém da possibilidade de fornecer informações sobre uma população. A distribuição amostral integra e relaciona vários conceitos estatísticos e algum conhecimento acerca do comportamento da variável em estudo. Ainda nesse sentido, um raciocínio minimamente suficiente para trabalhar com a distribuição amostral se mostra inacessível para alguns alunos devido a uma abordagem estritamente técnica, deixando em segundo plano as questões ligadas à interpretação.

Alguns alunos apresentam grandes dificuldades para perceber que, diante de uma população com um número finito de elementos, é possível extrair diversas amostras com um tamanho fixo. Sendo esse número previamente fixado, é possível extrair várias amostras contendo *n* elementos. Suponha que sejam extraídas da população todas as amostras possíveis que contenham *n* elementos e, para cada uma das amostras, seja calculado o valor de certo parâmetro, ou seja, a estimativa. Após calcular todos esses valores e organizá-los é possível que exista um padrão entre eles. Esse padrão é o que se costuma chamar de distribuição amostral do parâmetro.

A simulação computacional é um recurso muito utilizado no ensino de estatística e indispensável para a repetição do processo de coleta de dados até que se perceba a distribuição amostral, porém, inicialmente, é melhor realizar esse processo manualmente com situações reais, dentro da própria classe, envolvendo os alunos. Isso é factível para pequenos conjuntos. Em outros momentos, quando a população ou a amostra possui um número grande de elementos, os recursos computacionais são mais indicados e, por vezes, necessários.

Teste de hipóteses

A estrutura de construção dos testes de hipóteses, uma das ferramentas mais usadas em estatística pelas ciências aplicadas, segue o raciocínio da lógica formal condicional, estrutura essa que será descrita sucintamente a seguir.

Um teste de hipóteses é um procedimento inferencial que consiste no estabelecimento de duas hipóteses. A primeira, nomeada H_0, é a hipótese nula em sua forma mais simples, representando uma igualdade; a segunda, nomeada H_a, é a hipótese alternativa, ambas relacionadas aos parâmetros de uma ou mais populações.

Com base nos dados, o procedimento permite rejeitar H_0 ou não rejeitar H_0, tendo uma probabilidade associada como critério do risco inerente à decisão. A construção é baseada no raciocínio dedutivo, oriundo da lógica condicional, na expressão do tipo “se…, então…”, discutida por Cordani (2001).

O raciocínio lógico condicional se apresenta de duas formas:

- *modus ponens* (modo afirmativo);
- *modus tollens* (modo negativo).

O erro conceitual que mais chama a atenção é o raciocínio lógico condicional *modus tollens*. Ele é recorrente na maioria das pessoas que completaram o ensino básico e indispensável para o entendimento dos fenômenos científicos, sociais, econômicos e climáticos. Por isso, desenvolver a inferência informal no ensino básico é condição necessária, mas não suficiente, para formação de adultos críticos.

Considerações finais

Uma das principais intenções educacionais é a busca por um aluno reflexivo e crítico, que possa exercer sua cidadania. Na formação de um aluno com essas características, o principal agente é o professor. É necessário que ele promova, entre outras coisas, o debate de ideias e a socialização dos conhecimentos, buscando tornar o aluno cada vez mais entendido sobre o mundo ao qual pertence, relacionando os diversos tipos de informação para construir significados. Em alguns momentos, durante os processos reflexivos, é necessário interpretar dados estatísticos. Isso acontece também para a compreensão de alguns fenômenos sociais, cujo conhecimento possibilita um exercício mais consciente e crítico de cidadania. De acordo com Batanero (2011), uma das finalidades da educação estatística é constituir parte da educação desejável para futuros cidadãos adultos.

Explorar a estatística tem sido um desafio para alunos, professores, instituições de ensino e organizações de pesquisa. O foco em técnicas e cálculos muitas vezes substitui as possibilidades de compreensão e a discussão dos conceitos básicos, dificultando a preparação e o entendimento dos conceitos fundamentais da estatística.

A educação estatística tem seu desenvolvimento facilitado quando aplicada a abordagem sociointerativa e com situações interdisciplinares. Dessa maneira, além de desenvolver os conceitos estatísticos, essa prática expõe os alunos a alguns tópicos que são potenciais centros de interesse e que podem motivá-los, uma vez que estejam ligados a assuntos nos quais se sintam envolvidos. Considerar a realidade dos alunos e incorporá-la ao estudo dos conceitos estatísticos pode possibilitar o entendimento deles quanto ao mundo em que vivem, podendo tornar-se agentes de mudança social à medida que aumentam sua compreensão da ciência.

Ben-Zvi e Garfield (2004) fazem algumas recomendações que contribuem para a mudança no cenário da educação estatística, entre elas:

- preferência por dados reais pertencentes à realidade imediata dos alunos em vez de utilizar dados pertencentes a contextos distantes dos vivenciados por eles;
- foco no desenvolvimento do letramento, raciocínio e pensamento estatísticos;
- utilizar ferramentas tecnológicas sempre que possível;
- incentivar atitudes positivas e ressaltar a força dos processos estatísticos;
- buscar vários métodos, alternativas de leitura e atividades.

Visto que "o interesse dos alunos é o valor maior a ser cultivado na escola, em cada ação docente" (MACHADO, 2009, p. 45), a prática da inferência informal aumenta as possibilidades de tornar o aprendizado mais significativo e agradável, fazendo com que os alunos sejam naturalmente encaminhados para as análises mais formais. Nesse sentido, espera-se que a aprendizagem de cada aluno seja um processo ativo e único de construção do próprio conhecimento a partir das experiências pessoais que formaram os princípios adotadas na composição do conhecimento.

Referências

BATANERO, C. **Didáctica de la estadística**. Granada: Universidad de Granada, 2001.

BATANERO, C. *et al*. **Teaching statistics in school mathematic-challenges for teaching and teacher education**. Dordrecht: Springer, 2011.

BEN-ZVI, D.; GARFIELD, J. **The challenge of developing statistical literacy**: reasoning and thinking. Dordrecht: Kluwer academic publishers, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BURRILL, G.; BIEHLER, R. Fundamental statistical ideias in the school curriculum and trainning teachers. *In*: BATANERO, C. et al. **Teaching statistics in school mathematic-challenges for teaching and teacher education**. Dordrecht: Springer, 2011. p. 57-69.

CAMARGO, A. R. **A Estatística na Escola Básica**: uma prática de inferência informal. 2016. 94 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

CAMPOS, C. R. *et al*. **Educação estatística**: teoria e prática em ambientes de modelagem matemática. Belo Horizonte, Autêntica, 2011.

CORDANI, L. K. **O Ensino de Estatística na Universidade e a controvérsia sobre os fundamentos da inferência**. 2001. 154f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

FERREIRA, A. B. H. **Minidicionário Aurélio Século XXI**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2000.

HAND, D. J. **Statistics**: a very short introduction. Oxford: Oxford University Press, 2008.

MACHADO, N. J. **Educação**: microensaios em mil toques. vol. 1. São Paulo: Escrituras, 2009

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. de. **Noções de probabilidade e estatística**. São Paulo: Edusp, 2011.

MOORE, D. **A estatística básica e sua prática**. São Paulo: LTC, 2000.

PFANNKUCH, M. *et al*. Telling data stories: essential dialogues for comparative reasoning. **Journal of Statistics Education**, v. 18, n. 1, 2010. p.1-38.

PFANNKUCH, M.; HORTON, N. **A teacher's guide to informal comparative reasoning**, Department of Statistics: The University of Auckland, 2009. Disponível em: https://new.censusatschool.org.nz/wp-content/uploads/2009/07/nzteachersguide-2009-08-04.pdf. Acesso em: 15 fev. 2022.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. São Paulo: Cortez, 2007.

SOTOS, A. E. C. *et al*. Students' misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education. **Educational research review**. v. 2, n. 2, 2007. p. 98-113.

Matemática e História: transdisciplinaridade na construção de catapultas e trebuchets

Bruno Pavani Azevedo[10]

Rafael de Almeida Serra Dias[11]

Introdução

A realização de qualquer atividade escolar que represente uma ruptura com o ambiente da sala de aula estimula e desperta o interesse dos estudantes. Cada vez mais, existe uma cobrança por parte dos próprios alunos por novas formas de aprender e de se relacionar com os temas estudados. As teorias educacionais das mais variadas tendências abordam a importância do significado do aprendizado. Paulo Freire, José Carlos Libâneo, Demerval Saviani, entre outros, combatiam modelos escolares congelados e conservadores.

Na história da educação brasileira recente, a partir da Constituição Cidadã promulgada em 1988, houve o início de um processo de mudança e democratização cada vez maior, aprofundado com a LDB, de 1997, e complementado com a BNCC, de 2017. As transformações nesses documentos norteadores da educação no Brasil permitem, cada vez mais, novas propostas e atuações de práticas inovadoras.

Considerando essas questões, este artigo apresenta uma proposta de trabalho transdisciplinar desenvolvido pelos autores, com o qual se buscou estabelecer uma relação entre diferentes campos de saber, mais especificamente envolvendo as disciplinas

---

[10] Professor do Instituto Federal de São Paulo. *E-mail*: bruno.azevedo@ifsp.edu.br

[11] Doutor em História Contemporânea pela Universidade de Lisboa. Professor da Fundação de Ensino de Bragança Paulista e da Escola Viverde de Educação. *E-mail: r_asd@hotmail.com*

de Matemática, Física e História, dialogando assim com o parecer do Conselho Nacional da Educação, cujo fragmento é destacado a seguir.

> …evidencie a contextualização, a diversificação e a transdisciplinaridade ou outras formas de interação e articulação entre diferentes campos de saberes específicos, contemplando vivências práticas e vinculando a educação escolar ao mundo do trabalho e à prática social e possibilitando o aproveitamento de estudos e o reconhecimento de saberes adquiridos nas experiências pessoais, sociais e do trabalho (BRASIL, 2018, Art. 7, § 2º).

A transdisciplinaridade tem sido defendida nos últimos anos nos textos norteadores do Estado brasileiro, como demonstrado no trecho citado.

Nesse contexto, existe uma defesa da chamada *cultura maker*[12], enquanto meio de educação moderna e eficiente para os novos desafios dos alunos. Concordamos com ela e coadunamos com a definição dos autores que estabelecem uma relação entre a construção e o produto final. Sobre isso, vale destacar que os

> pesquisadores que vêm estudando o movimento maker para a educação têm feito uso da teoria que Papert denominou de construcionismo (PAPERT, 1986), baseada no Construtivismo de Piaget (1896-1980). O construcionismo promove a abordagem pela qual o aprendiz constrói conhecimento quando ele produz um objeto de seu interesse, como uma obra de arte, um relato de experiência ou um programa de computador. Papert enfatizava a aprendizagem por intermédio do handson (mão na massa), e o heads in(imersão mental), pelo fato de o aprendiz estar envolvido na construção de algo do seu interesse. (MOURA et al. 2020, p. 82)

---

[12] O movimento *maker* utiliza-se da ideia DIY (acrônimo de *do it yourself*; do inglês, "faça você mesmo".)

Qualquer processo de identificação com o conhecimento torna-se mais significativo quando este tem um envolvimento maior por parte do aluno. Assim, ao permitir esse protagonismo dos discentes, o construcionismo potencializa o tema estudado por todos esses passos desenvolvidos.

Destacamos ainda que, apesar do modismo pedagógico, podemos construir algo significativo, desde que integrado às tarefas e às questões, como destacam alguns autores:

> Para que a educação *maker* possa dar suporte aos atos de currículo e à interdisciplinaridade, é importante que a integração das atividades *maker* ao currículo das disciplinas seja realizada de forma fundamentada e não como modismo. Primeiro, a tecnologia deve ter uma função de auxiliar a realização de algo que não pode ser feito adotando métodos convencionais. Segundo, é necessário nivelar a tecnologia à proposta educativa, ou seja, não é utilizar vários equipamentos tecnológicos para abordar um conteúdo que não os demanda. (BLIKSTEIN; VALENTE; MOURA, 2020, p. 529-530)

A proposta de trabalho

Escolhemos como tema para discussão a Idade Média, etapa da História que foi nomeada pelos Iluministas como a Idade das Trevas, depreciando, assim, o período medieval. Podem-se encontrar, inclusive, vários livros, quadros, filmes, entre outros, que representam este período (476 – 1453 d.C.), como sendo uma longa noite de mil anos, focalizando as perseguições religiosas ou as grandes epidemias.

Entretanto, em contraponto, sabe-se que existem várias formas de conhecimento que surgiram nesse contexto, tais como as tecnologias de plantio, as ferramentas, a filosofia de Santo Agostinho, entre outros. Além disso, diversas ferramentas, como destaca o professor da Universidade de São Paulo, Hilário Franco Júnior (2004, p. 163),

> Lembremos alguns: calça comprida (século V), atrelagem rígida de animais de tiro, ferradura (ambos do século X),

> colher (século XI), álcool (Ca. 1100), atrelagem animal em fila, moinho de vento, leme vertical, chaminé, tear com pedal (todos do século XII), camisa com botão (Ca. 1204), óculos (Ca. 1285), roda dentada (1298), carrinho de mão, ferro fundido, luneta, serra hidráulica, macaco-elevador, roda de fiar, espelho de vidro (todos do século XIII), fole hidráulico (1311), garfo, relógio mecânico (os dois do século XIV), portulano e imprensa de tipos metálicos móveis (século XV).

Nesse contexto, propôs-se a construção, em grupo, de dois protótipos em miniatura, a saber, uma catapulta e um *trebuchet*, duas antigas armas utilizadas em batalhas (Figura 1). Os equipamentos foram selecionados para, por meio de uma atividade interdisciplinar, auxiliarem na construção de saberes para as disciplinas de História e Matemática.

Figura 1 – Catapulta e *Trebuchet*

(a)

(b)

Fonte: a) Catapulta Medieval. 2012. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Catapult_1_Mercato_San_Severino.jpg. b) Trebuchet. 2005. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Trebuchet.jpg. Acesso: 14 mar. 2022.

Partindo dessa situação-problema, da distância entre o senso comum e o conhecimento escolar, propomos fazer o aluno compreender a complexidade de algumas inovações do medievo a partir da construção desses dois equipamentos de guerra.

No que diz respeito à disciplina de História, o entendimento da criação dessas tecnologias de guerra e a maior eficiência do *trebuchet,* criado na Idade Média, possibilitam ao aluno entender uma série de aspectos daquela sociedade. No caso da disciplina de Matemática, a construção da catapulta e do *trebuchet* permite ao aluno observar na prática o comportamento de um objeto durante um lançamento oblíquo e, ao mesmo tempo, oferece um método para que o movimento seja estudado através da função quadrática de forma lúdica e simples. Ao construir os dois modelos e observar seu funcionamento na prática, os alunos conseguem calcular o alcance e a altura máxima dos projéteis de forma simples, sem a necessidade de apenas decorar fórmulas.

Matemática e Física

No ensino de Matemática, os alunos frequentemente apresentam dificuldades ao estudar as funções quadráticas, suas equações e seus gráficos. Essa dificuldade ocorre pelo fato de que o conteúdo é, muitas vezes, abstrato, pois é apenas apresentado em forma de equações e de esboços de gráficos. Assim, o aluno acaba apenas decorando algumas fórmulas, sem saber exatamente como proceder a partir delas.

Ao realizar a atividade proposta de maneira prática, observa-se que fica mais fácil para o aluno trabalhar com a teoria. Utilizando materiais simples para construção das réplicas das armas, bem como um cronômetro e uma trena, pode-se calcular o tempo de voo e o alcance horizontal dos projéteis lançados pelos dois equipamentos construídos. Essas medidas servem como base para os cálculos matemáticos da função quadrática que representa a trajetória do projétil. A partir desses cálculos, o aluno apresenta mais facilidade para resolver outros, tal como a altura máxima atingida do projétil lançado pela catapulta.

Figura 2 – Réplicas de catapulta e *trebuchet* construídas pelos alunos.

Fonte: os autores, 2022.

No ensino da Física, o lançamento horizontal, característico do *trebuchet,* e o lançamento oblíquo, promovido pela catapulta, são dois conteúdos normalmente considerados muito difíceis pelos alunos, devido ao grande número de fórmulas matemáticas e cálculos apresentados nos exemplos e nos exercícios. Ao trabalhar de maneira prática, essas dificuldades diminuem consideravelmente, pois o interesse do aluno aumenta ao ver o dispositivo em funcionamento.

Ainda, ao comparar os dois dispositivos em funcionamento, é possível verificar a diferença entre os respectivos alcances horizontais, velocidades e tempos de voo dos projéteis, trazendo à prática uma comparação que é feita apenas em teoria nos livros.

Compreendemos que a proposta contempla as seguintes habilidades estabelecidas pela BNCC:

> **(EM13MAT103)** Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais (BRASIL, 2017, p. 533).
>
> **(EM13MAT503)** Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais (BRASIL, 2017, p. 541).
>
> **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise de interações gravitacionais, com ou sem o uso de aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). (BRASIL, 2017, p. 557).
>
> **(EM13CNT205)** Interpretar resultados e realizar previsões sobre atividades experimentais, fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas noções de probabilidade e incerteza, reconhecendo os limites explicativos das ciências. (BRASIL, 2017, p. 557).

Essas habilidades, trabalhadas através de um processo prático de construção dos dispositivos citados (catapulta e *trebuchet*), permitem que o aluno, analisando os resultados obtidos por meio das medições feitas e comparando com os resultados obtidos nos cálculos realizados, desenvolva uma maior autonomia no processo investigativo da ciência.

Ao término da atividade, na qual utilizaram os dispositivos de forma prática, atirando projéteis em alvos previamente demarcados sob orientação do professor, percebe-se que os alunos conseguem compreender mais claramente os conceitos de função quadrática, lançamento horizontal e lançamento oblíquo. A cada lançamento, os alunos ajustam a distância, a “força” empregada e, assim, aprendem na prática importantes conceitos da Matemática com aplicação na Física.

História

Aplicar a construção de equipamentos que foram desenvolvidos na Idade Média (o *trebuchet*) e na Idade Antiga (a catapulta), permite, por meio de comparação entre eles, a avaliação do avanço tecnológico no período entre essas duas épocas.

Está diretamente associado ao período medieval um estereótipo equivocado de ter sido esse um período sem conhecimento e totalmente fechado em si mesmo. Buscando quebrar essas ideias preconcebidas, e ainda possibilitar uma vivência prática dos conceitos discutidos, a proposta dialoga diretamente com o trecho das ciências humanas da BNCC a seguir:

> **(EM13CHS102)** Identificar, analisar e discutir as circunstâncias históricas, geográficas, políticas, econômicas, sociais, ambientais e culturais de matrizes conceituais (etnocentrismo, racismo, evolução, modernidade, cooperativismo/desenvolvimento etc.), avaliando criticamente seu significado histórico e comparando-as a narrativas que contemplem outros agentes e discursos (BRASIL, 2017, p. 572).

Além dessa questão, outra motivação desse trabalho é permitir ao aluno compreender melhor alguns temas fundamentais para a Alta Idade Média, como o Feudo e as relações que ele estabelece com essa sociedade. Para isso, como estabelece a BNCC, é fundamental destacar a importância de se

> **(EM13CHS206)** Analisar a ocupação humana e a produção do espaço em diferentes tempos, aplicando os princípios de localização, distribuição, ordem, extensão, conexão, arranjos, casualidade, entre outros que contribuem para o raciocínio geográfico. (BRASIL, 2017, p. 573).

No desenvolvimento do trabalho, além de ter sido solicitada a construção das duas armas de guerra, a catapulta e o *trebuchet*, ainda foi proposto aos alunos a produção de um texto sobre os feudos. Explorando as relações dessa sociedade feudal, o estudante é levado a compreender como ele foi criado, a saber, por meio do *comitatus*, uma aliança entre o chefe e seus guerreiros, depois das vitórias em batalhas, as terras conquistadas eram divididas entre o chefe e seus melhores guerreiros, permitindo que esses criassem, então, seus feudos. A essa cerimônia dá-se o nome de suserania e de vassalagem.

Essa discussão é importante porque os alunos têm muita dificuldade em distinguir as duas relações fundamentais da Idade Média. Na horizontal, observada entre nobres, ocorre a doação de terras para um nobre que promete auxílio militar ao suserano que lhe doou a terra para criar seu feudo; na vertical, a relação é entre o senhor feudal e o servo, que vai trabalhar no feudo em troca de proteção e moradia.

A violência e as guerras eram constantes neste período. Por isso, é fundamental os alunos perceberem esse processo de uma maneira ampla. Para buscar resolver esse problema, a turma é dividida em duas equipes, cada qual com um dos professores envolvidos no papel de suserano, que doa suas terras para conseguir a fidelidade daqueles guerreiros. A partir daí, uma simulação da cerimônia auxilia os alunos a compreenderem a importância desse acontecimento naquela dimensão.

Esse processo deve ser feito em parceria, como destacam Stella *et al* (2021, p. 13), que afirmam que "a cultura Maker pode ser interpretada como as atitudes que se deseja desenvolver por meio das atividades didáticas em sala de aula, para as quais espera-se que alunos e professores se tornem colaboradores." Ou seja, não se pode fazer isso sozinho, não faz sentido nem na Cultura *Maker*, ou mesmo em relação a qualquer metodologia da educação.

Considerações finais

O trabalho propõe uma atividade transdisciplinar ao tratar conceitos de Matemática, História e Física. Além, disso, também possibilita explorar as diferentes habilidades dos alunos, que vão além da construção, como os cálculos feitos com os protótipos, a produção textual e ainda a produção artística de um brasão para cada grupo. Além de explorar múltiplas habilidades, cria uma dinâmica muito importante de divisão de tarefas entre os alunos, buscando a cooperação e o aproveitamento das suas diferentes qualidades.

A proposta de trabalho favorece a heterogeneidade na formação dos grupos, nos quais alunos com diferentes habilidades podem desempenhar papéis igualmente importantes na execução do projeto. Outro elemento de sucesso do trabalho é a realização da competição de quem sabe melhor utilizar os protótipos. Nesse momento, os alunos competem para ver quais dispositivos conseguem maior alcance, ou seja, atirando o projétil a uma maior distância, e quem consegue acertar o alvo. Esse momento desperta a mobilização entre eles e, como já citado, o construcionismo aparece de maneira mais evidente.

Ao término dessa fase do trabalho, é notável a felicidade e satisfação dos alunos por terem construído algo e por estarem compartilhando isso com os outros. Até mesmo a disputa para vencer os "adversários" é motivo de empenho, divertimento e satisfação.

É importante salientar que durante a aplicação do trabalho os professores conseguem observar que todos os alunos do grupo participam das decisões e não só aqueles tidos como "alunos de exatas". Muitas vezes, inclusive, os alunos que não apresentam tanta facilidade para realizar os cálculos são aqueles que obtêm melhor desempenho na competição prática.

Referências

BLIKSTEIN, P.; VALENTE, J.; MOURA, É. M. de. Educação Maker: onde está o currículo? **Revista e-Curriculum**, v. 18, n. 2, p. 523-544, jun. 2020. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/curriculum/article/view/48127/32229. Acesso em: 11 mar. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. 2017.

BRASIL. **Resolução CNE/CEB 3/2018** – Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. MEC: Brasília - DF, 2018.

FRANCO JR, H. **A Idade Média**: nascimento do Ocidente. São Paulo: Brasiliense, 2004.

STELLA, A. L.; FIGUEIREDO, A. P. S.; SILVA, D. D. S. S. D. da; AMARAL, M. C. do; SACHETTI, W. L. BNCC e a cultura maker: uma aproximação na área da matemática para o ensino fundamental. **Revista InovaEduc**, Campinas, SP, n. 4, p. 1–37, 2021.

A braquistócrona e o movimento de uma roda

Cláudio Sérgio Sartori[13]

Irval Cardoso de Faria[14]

Introdução

O presente capítulo visa a discutir o movimento de dois pontos sobre um círculo de raio R girando sem escorregar sobre uma superfície: um ponto em contato com a superfície e outro a uma distância $r \leq R$ do eixo de rotação, com o auxílio das equações das cicloides descritas por esses dois pontos. Encontraremos aqui a distância percorrida por esses pontos e sua relação com o movimento composto, lançando luz ao paradoxo de Aristóteles (DRABKIN, 1950).

Breve discussão sobre o paradoxo de Aristóteles

O problema do movimento da roda foi discutido segundo a mecânica aristotélica na Antiguidade (SARTORI; FARIA, 2021). Refere-se basicamente ao estudo do movimento de dois pontos sobre uma roda de raio R em rotação sem escorregamento sobre uma superfície: um ponto P em contato com a superfície e outro P_i a uma distância $r < R$ do centro de rotação O. Com o movimento de rotação da roda, pode-se observar dois círculos movendo-se: um em contato com a superfície, que rola sem escorregar; outro de raio menor fixo ao de raio maior. Em um ciclo completo, a distância percorrida pelos círculos (movimento de translação) tem o mesmo comprimento, como evidenciamos $d = 2\pi R$ na Figura 1.

O estudo discutido neste capítulo irá mostrar que as distâncias percorridas pelos dois círculos têm o mesmo

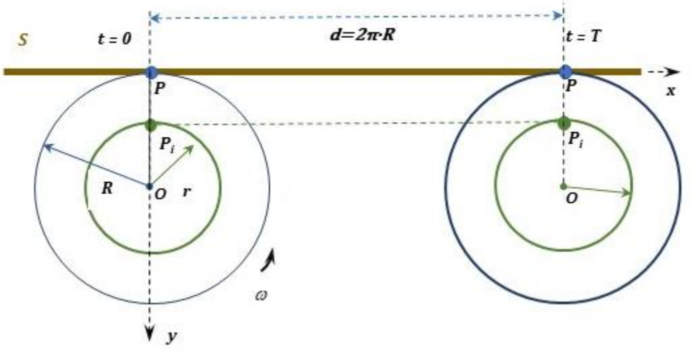
---

[13] Doutor em Ciências pela Unicamp. *E-mail*: claudio.sartori@fatec.sp.gov.br

[14] Doutor em Ciências pela Unicamp. *E-mail*: irval.faria@fatec.sp.gov.br

comprimento, $\boldsymbol{d = 2\pi R}$, igual ao comprimento da circunferência de raio *R*, mas a distância percorrida pelo círculo menor de raio *r* é menor que sua circunferência $\boldsymbol{2\pi r}$, apontado como paradoxo.

Figura 1 – Mostra uma roda que gira com velocidade angular constante ω e os círculos de raios *R* e *r* interiores; o maior de raio *R* rola sem escorregar sobre a superfície $\boldsymbol{S}$. Após um período *T* os pontos *P* e P_i retornam à posição inicial em $t = 0$.



Fonte: autoria própria.

Estudo do problema com as cicloides que representam as trajetórias dos pontos *P* e *Pi*.

Observando-se a Figura 2, as equações das braquistócronas parametrizadas podem ser obtidas (LAEVEN; LAEVEN-ARETZ, 2014) por:

Posição do ponto P:

$$\begin{cases} x(t) = R(\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ y(t) = -R(1 - \cos\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \omega t$$

$$\begin{cases} x(t) = R(\omega t - \operatorname{sen}(\omega t)) \\ y(t) = -R(1 - \cos(\omega t)) \end{cases}$$

Velocidade do ponto P:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x = R\omega + R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dfrac{d\theta}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} = v_y = -R\cos\theta\,\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x = R\omega + R\omega\,\mathrm{sen}(\omega t) \\ \dfrac{dy}{dt} = v_y = -R\omega\cos(\omega t) \end{cases}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

No ponto mais baixo:

$$\theta = \omega t = \pi \Leftrightarrow v_x = 2R\omega \Leftrightarrow v_y = 0 \Leftrightarrow v = 2R\omega$$

$$v = \sqrt{(R\omega - R\omega\cos(\omega t))^2 + (-R\omega\,\mathrm{sen}(\omega t))^2}$$

$$v = \sqrt{2R^2\omega^2(1 - \cos(\omega t))}$$

$$v = \sqrt{2R^2\omega^2(1 - \cos\theta)}$$

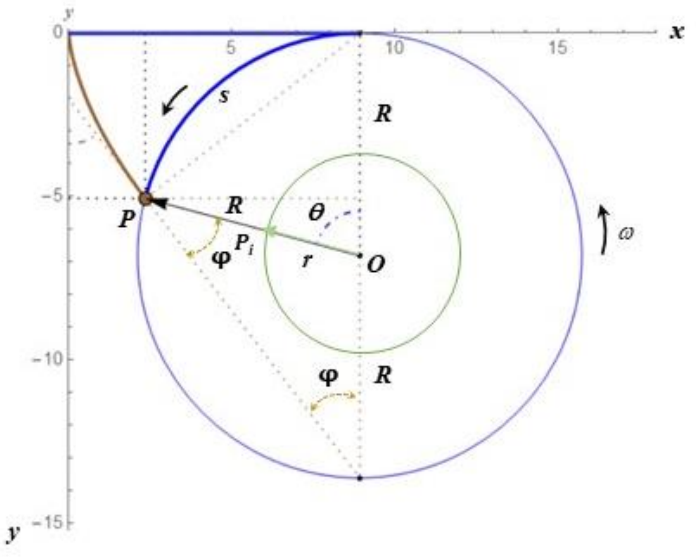
$$v = R\omega\sqrt{2(1 - \cos\theta)}$$

$$\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{2} \Leftrightarrow 1 - \cos\theta = 2\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

$$v = R\omega\sqrt{4\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}}$$

$$v = 2R\omega \cdot \mathrm{sen}\frac{\theta}{2}$$

Figura 2 – Comportamento geométrico de um ponto P na circunferência ao percorrer a cicloide que representa sua trajetória.



Fonte: autoria própria.

Apresentamos, a seguir, as funções matemáticas para a velocidade v (módulo) do ponto P e a distância, Δs, percorrida pelo ponto P no trajeto:

$$v(t) = 2R\omega \operatorname{sen}\frac{\omega t}{2}$$

$$\Delta s = \int_0^T v(t)dt$$

$$\Delta s = \int_0^T 2R\omega \operatorname{sen}\frac{\omega t}{2} dt$$

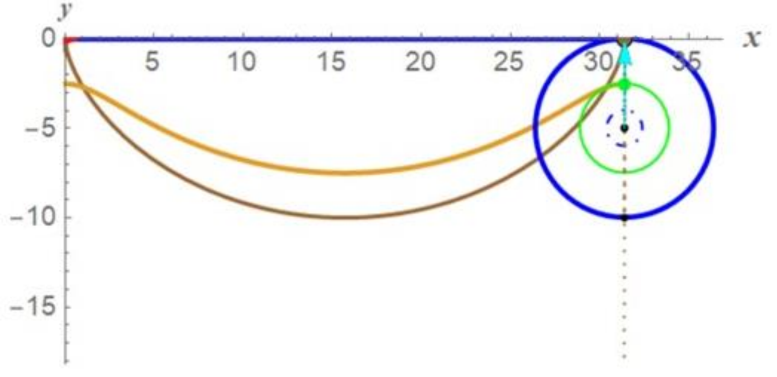
$$\Delta s = 2R\omega \int_{0}^{\frac{2\cdot\pi}{\omega}} \operatorname{sen}\frac{\omega t}{2}\,dt$$

$$\Delta s = 2R\omega \frac{4}{\omega}$$

$$\Delta s = 8R$$

Ponto *P*: Comprimento da braquistócrona gerada: $\boldsymbol{\theta = \omega t}$

Figura 3 – Comprimento da braquistócrona gerada.



Fonte: autoria própria.

$$\begin{cases} x = R(\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ y = -R(1 - \cos\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = R(\omega t - \operatorname{sen}\omega t) \\ y = -R(1 - \cos\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = R(1 - \cos\theta) \\ \dfrac{dy}{d\theta} = -R\operatorname{sen}\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \omega R(1 - \cos\omega t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -\omega R\operatorname{sen}\omega t \end{cases}$$

$$d = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$d = \int_0^{T} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Como $T = \frac{2\cdot\pi}{\omega}$

$$d = \sqrt{2}\omega R \int_0^{\frac{2\cdot\pi}{\omega}} \sqrt{1 - \cos\omega t}\, dt$$

$$d = \sqrt{2}\omega R \int_0^{\frac{2\cdot\pi}{\omega}} \sqrt{1 - \cos\omega t}\, dt$$

$$d = \int_0^{T} \sqrt{\left(\omega R(1 - \cos\omega t)\right)^2 + (-\omega R \operatorname{sen}\omega t)^2 dt}$$

Fazendo $\omega = 1\frac{rad}{s}$:

$$d = \sqrt{2}R \int_0^{2\cdot\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt$$

$$d = 8R$$

Mostramos, portanto, que $d = \Delta s$, indicando que o comprimento d da cicloide é igual ao espaço percorrido pelo ponto P.

Ponto P_i: equação e comprimento da cicloide gerada

$$\begin{cases} x = R\theta - r \operatorname{sen}\theta \\ y = r\cos\theta - R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = R\omega t - r \operatorname{sen}\omega t \\ y = r\cos\omega t - R \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = R - r\cos\theta \\ \dfrac{dy}{d\theta} = -r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$d = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$d = \int_0^{2\pi} \sqrt{(R - r\cos\theta)^2 + (-r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}\, d\theta$$

$$d = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\, d\theta$$

$$d = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta}\, d\theta$$

Se $r = R$, ou seja, se P_i coincidir com P.

$$d = 8R$$

No caso em discussão, $r \leq R$, exemplo: se $r = R/2$, tem-se:

$$d = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta}\, d\theta$$

Resolvendo, numericamente, para R = 5 m a distância percorrida pelo ponto P vale $d = 8R$ = 40 m e do ponto P_i: d_i = 33,41 m; elucidando, assim, o paradoxo de Aristóteles.

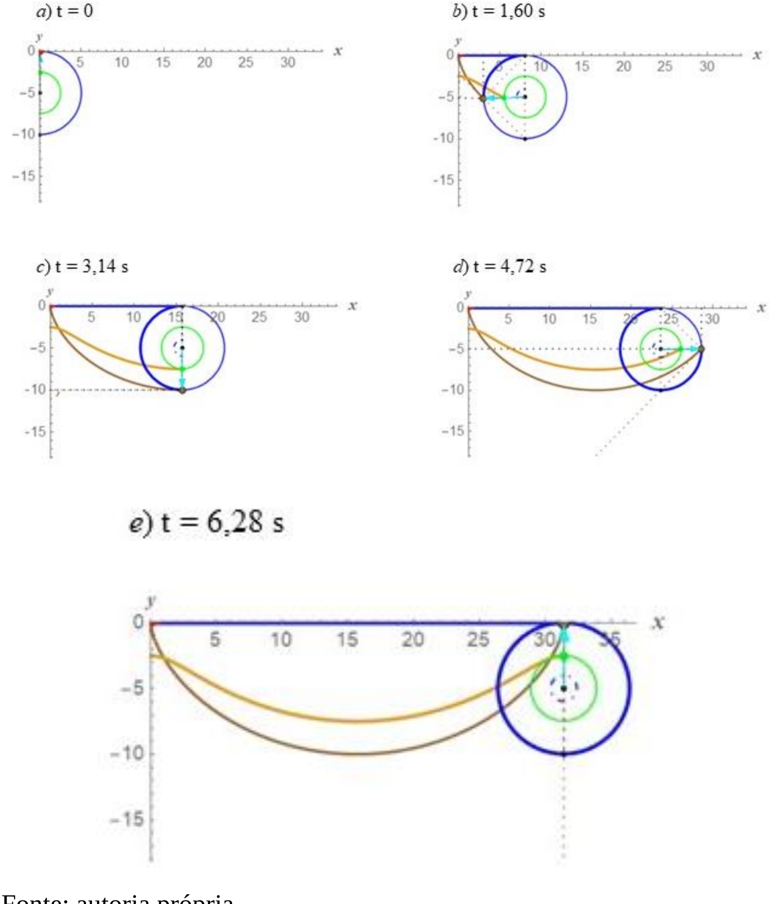
Simulações gráficas do comportamento dos pontos P e P_i.

A seguir, apresentamos, nas figuras 4(*a*), 4(*b*), 4(*c*), 4(*d*), 4(*e*), uma simulação gráfica do movimento dos pontos P e P_i, com uso do software Mathematica (WOLFRAN, 2020), observando as trajetórias desses pontos.

Animação do movimento composto dos pontos

Figura 4 – Animação feita para R = 5 m; r = R/2 e ω = 1 rad/s da trajetória dos pontos P e P_i. Fazendo:

$$\omega = 1\frac{rad}{s}: T = 2\pi \Leftrightarrow v = \omega R \Leftrightarrow v = 1R \Leftrightarrow v = R\frac{m}{s}$$



Fonte: autoria própria.

Conclusão

Os resultados teóricos apresentados neste trabalho evidenciam uma perfeita solução para elucidamento do paradóxo de Aristóteles, mostrando, assim, que dois pontos, um exterior e outro interior a uma roda, percorrem distâncias diferentes. Para Aristóteles, tal conclusão não parecia verdadeira.

Estudos complementares, teóricos e experimentais, a serem desenvolvidos pelos autores na Faculdade de Tecnologia de Sorocaba – FATEC Sorocaba permitirão realizar análises comparativas entre diferentes cicloides, o que, em trabalhos posteriores, será motivo de discussões.

Referências

DRABKIN, I. E. Aristotle's Wheel: Notes on the History of a Paradox. **Osiris,** 9, p. 162–198, 1950.

LAEVEN, A. H.; LAEVEN-ARETZ, L. J. M. **The authors and reviewers of the Acta Eruditorum 1682-1735**. Molenhoek: The Netherlands, 2014.

SARTORI, C.; FARIA, I. C de. A cicloide e o movimento composto. *In*: OLIVEIRA, M.; GOMES, R. R.; PANTANO FILHO, R. **Matemática e ciências**: ensino, pesquisa e extensão. Salto: FoxTablet, 2021. p. 117-133.

WOLFRAN. W. **Mathematica**: the world's definitive system for modern technical computing. Disponível em: https://www.wolfram.com/mathematica/. Acesso em: 14 set. 2020.

A Física do Relógio Cuco

Rubens Pantano Filho[15]

Introdução

O relógio cuco é um conhecido marcador de tempo que muita nos chama a atenção, principalmente pelo seu *layout* característico e também pelo "canto do pássaro". Os que são jovens há mais tempo, provavelmente devem se recordar do relógio cuco em uma das paredes da casa dos parentes mais velhos. Como pertenço a esse grupo, tenho boas lembranças daquele relógio que – quando criança – me despertava a curiosidade na residência da avó. Hoje, em casa, ele também é uma das atrações do meu neto; não há criança que não se divirta com esse clássico marcador de tempo que vem atravessando gerações.

Os relógios de pêndulo (não exatamente o cuco) foram inventados em 1656, por Christiaan Huygens (1629-1695), um dos mais destacados físicos do século XVII (VIANA, 2020).

O relógio cuco, como o mostrado na Figura 1, é um relógio de pêndulo que marca as horas com a emissão de um som semelhante ao emitido pelo pássaro cuco. Ele tem um "pássaro automatizado" que se move para fora da caixa do relógio, em geral a cada meia hora. Desde meados do século XVIII, ele permanece quase sem variação.

Segundo consta, os relógios cuco surgiram na Alemanha, numa região denominada Floresta Negra, por volta do século XVIII. Nos períodos de inverno rigoroso, lenhadores e artesãos do local construíam esses relógios para conseguirem uma pequena renda extra, quando saíam pela Europa no verão para comercializarem seus produtos artesanais.

---

[15] Doutor em Engenharia e Ciência dos Materiais. Docente no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – campus Bragança Paulista. *E-mail*: rubenspantano@ifsp.edu.br

O artesão Franz Anton Ketterer, no ano de 1750, teria feito algumas adaptações ao relógio da época, deixando-o com esse formato que lhe é característico. Para tanto, incrementou dois foles ao relógio, de forma que, ao completar o ciclo de uma hora, o artefato produzisse dois sons diferentes, um grave e outro agudo. O artesão, ao escutar os pássaros nativos da região, pensou em combinar a utilidade do relógio com um toque especial para a marcação do tempo. Inicialmente, o relógio feito por Ketterer não tinha o tradicional "passarinho" que sai da casinha para "cantar" as horas. Foi bem mais tarde, no século XIX, que ele foi incrementado ao relógio devido à semelhança do canto do pássaro cuco ao som produzido pelos foles. Com o passar do tempo, os artesãos que deram continuidade à ideia de Ketterer foram refinando o objeto, retratando nele cenas de seus cotidianos: caças, animais da região, lenha, serra, ordenha, casas de madeira ou os próprios trabalhadores.

Figura 1 – Relógio cuco.

Fonte: **Coockoo clock**. 2020. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kuckucksuhr_schwarzwald.jpg. Acesso em: 01 mar. 2022.

Pêndulo, engrenagens, "pesos", polias e correntes

Além do tradicional passarinho, todo relógio cuco tem também um pêndulo, cuja função é fazer a contagem dos segundos. Cada vez que é realizado um ciclo do pêndulo, o vai-e-vem, um segundo de tempo é completado, ou seja, os fabricantes dos relógios cuco fazem a calibragem do eixo para que uma oscilação completa do pêndulo tenha um período igual a um segundo.

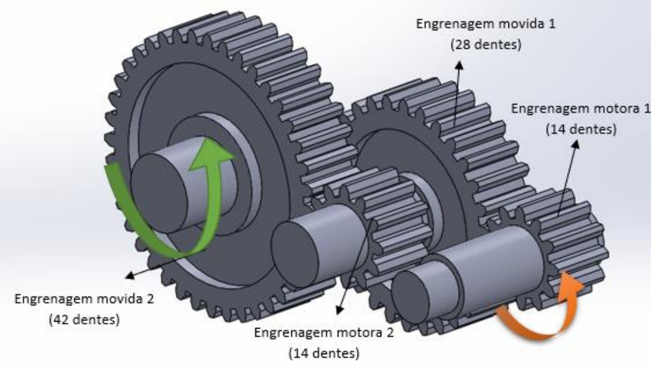
Para funcionar em seu mais perfeito estado, o relógio cuco possui uma grande quantidade de engrenagens que ajudam a movimentar seus ponteiros (Figura 2). Em seu sistema há dois "pesos" (que parecem pinhas invertidas) ligados com correntes em torno das engrenagens e que descem por meio do balançar do pêndulo**.** Esses "pesos" controlam todo o funcionamento interno do relógio cuco. Um deles fica responsável por controlar os ponteiros; o outro, pelo controle do pássaro cuco.

Figura 2 – Engrenagens do relógio cuco.

Fonte: **Mecanismo do relógio cuco**. Disponível em: https://www.relogios-cuco.com/products-Mecanismo-de-rel%C3%B3gio.asp?GID=114. Acesso em: 01 mar. 2022.

A título de exemplo, observe na Figura 3 que o sistema de engrenagens para transmissão dos movimentos envolve um conjunto constituído por várias engrenagens (não é o mecanismo do relógio). Essas rodas dentadas podem ter um eixo em comum ou podem estar acopladas através do encaixe dos dentes.

Figura 3 – Transmissão de movimento por engrenagens.



Fonte: **Sistema de engrenagens**. Disponível em: https://www.redutoresibr.com.br/noticia/como-se-calcula-a-rpm-em-polias-e-engrenagens-. Acesso em: 01 mar. 2022.

Na Figura 3, as engrenagens denominadas “movida 1” e “motora 2”, por exemplo, giram com a mesma frequência angular, por terem em comum o eixo de rotação, ou seja:

$$\omega_{mov1} = \omega_{mot2}$$

Já nas engrenagens “motora 1” e “movida 1”, bem como a “motora 2” e a “movida 2”, a transmissão se dá pelo acoplamento das duas engrenagens por meio do encaixe dos dentes. Nesse caso, a relação entre as frequências angulares é a seguinte:

$$\omega_{mov1}.N_{mov1} = \omega_{mot1}.N_{mot1}$$

$$\omega_{mov2}.N_{mov2} = \omega_{mot2}.N_{mot2}$$

Nas expressões acima, os “Ns” correspondem aos números de dentes das respectivas engrenagens.

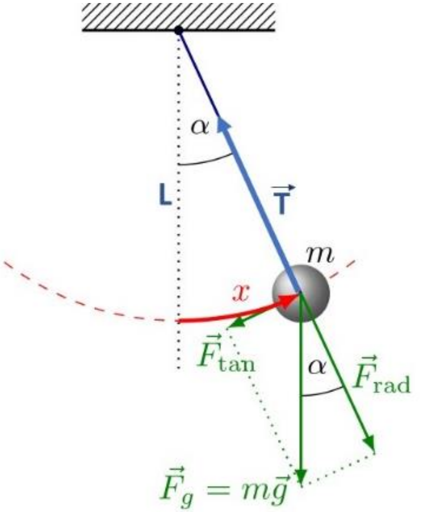
Badalo: como o relógio emite o som de “cu-co”!

O som característico do cuco não é eletrônico, mas sim criado a partir de dois foles e apitos**.** Os foles servem para produzir vento e são preenchidos de ar ao serem levantados por meio dos cabos de tensão que estão ligados às engrenagens do relógio cuco. Na hora de badalar, essas engrenagens liberam a tensão no fole, fazendo-os descer rapidamente. O ar, dessa forma, é levado aos dois apitos. Um emite o som de "cu" e o outro de "co", e assim o relógio faz "cu-co".

A Física do pêndulo simples

Imaginemos que o pêndulo do relógio seja o que na Física denominamos pêndulo simples. Esse é um sistema mecânico, idealizado, que consiste de um objeto de massa pontual "m" que pode oscilar em torno de um ponto de equilíbrio, suspenso por um fio leve, supostamente inextensível, de comprimento "L". A Figura 4 a seguir mostra a representação esquemática do movimento de um pêndulo simples com as forças que agem sobre ele.

Figura 4 – Pêndulo simples.



Fonte: Pêndulo. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PendulumForces.svg. Acesso em: 12 mar. 2022.

Ao ser deslocado da vertical e abandonado, o sistema passa a oscilar em torno do ponto mais baixo, que é a posição de equilíbrio quando ele está em repouso (SERWAY; JEWETT JR., 2015).

Podem-se observar na Figura 4 as duas forças que agem sobre o sistema, a força gravitacional (m.**g**) e a força tensora (**T**) exercida pelo fio sobre a massa "m". Além disso, na mesma Figura 4, observa-se que a força gravitacional também foi representada por suas componentes, uma na direção radial ($\mathbf{F_{rad}}$) e outra na direção tangente à trajetória ($\mathbf{F_{tan}}$).

Quando o pêndulo oscila em torno da vertical, a componente tangencial da força peso ($\mathbf{F_{tan}}$) será sempre oposta ao deslocamento do pêndulo. Portanto, pode-se dizer que a força peso é restauradora, ou seja, age tentando restabelecer o equilíbrio do sistema.

Utilizando a Segunda Lei de Newton na direção tangencial, temos:

$$F_{tan} = ma_{tan}$$

$$-m.g.sen\alpha = m.\frac{d^2x}{dt^2}$$

Como $x = L.\alpha$:

$$-m.g.sen\alpha = m.\frac{d^2(L.\alpha)}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{L}.sen\alpha$$

Para α < 10º ⇒ $sen\alpha \cong \alpha$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{L}.\alpha, \text{ onde podemos substituir } \omega^2 = \frac{g}{L}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\omega^2 . \alpha$$

Dessa forma, conclui-se que o movimento é aproximadamente harmônico simples. Para a equação diferencial acima encontra-se a solução:

$$\alpha = \alpha_{max} . \cos(\omega . t + \theta)$$

Observa-se que ω, que denominamos frequência angular, representa o quão mais ou menos rapidamente varia (ω.t + θ). Sabendo-se que:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

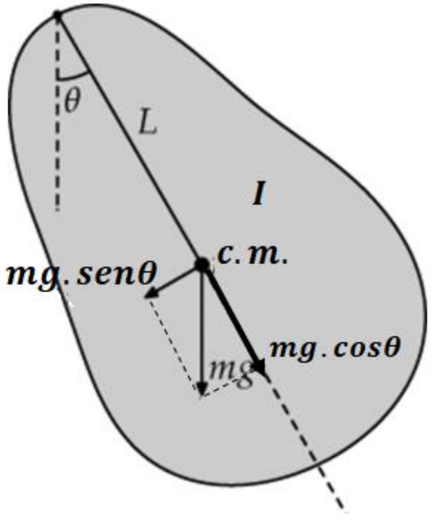
Da expressão, tem-se, então, que o período (T) de oscilação do pêndulo independe da massa (m) do objeto preso ao fio, mas depende do comprimento (L) do mesmo e da gravidade local (g).

Da expressão, pode-se concluir facilmente que o período (T) do pêndulo aumenta com o aumento do comprimento (L) do fio e diminui se o fio for encurtado.

O pêndulo físico

O pêndulo simples é na verdade uma idealização. Na prática, o que temos é o que denominamos pêndulo físico: um corpo razoavelmente rígido que pode oscilar verticalmente em torno de um eixo perpendicular ao seu plano, conforme mostra a Figura 5 (SERWAY; JEWETT JR., 2015).

Figura 5 – Pêndulo físico.



Fonte: **Pêndulo físico**. 2005. Modificado. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Physical-Pendulum-Labeled-Diagram.png. Acesso em: 01 mar. 2022.

Agora, devemos considerar que a força peso provoca um torque em relação ao eixo em torno do qual o pêndulo oscila. Dessa forma, utilizando a Segunda Lei de Newton na forma angular, temos:

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{ext}} = I.\boldsymbol{\alpha}$$

$$-m.g.L.sen\theta = I.\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{m.g.L}{I}.sen\theta$$

Para θ < 10º ⇒ $sen\theta \cong \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{m.g.L}{I}.\theta, \text{ onde podemos substituir } \omega^2 = \frac{m.g.L}{I}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2.\theta$$

Dessa foram, conclui-se que o movimento é também aproximadamente harmônico simples. Para a equação diferencial acima, encontra-se a solução:

$$\theta = \theta_{max}.\cos(\omega.t + \varphi)$$

Observa-se que ω (denominado frequência angular), representa o quão mais ou menos rapidamente varia (ω.t + φ). Sabendo-se que:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{g.m.L}}$$

O período de oscilação do pêndulo físico depende da massa (m), da forma como a massa do pêndulo está distribuída, ou seja, do momento de inércia (I) e da gravidade local (g): (m) é a massa do corpo, (L) é a distância entre eixo de oscilação e o centro de massa do corpo rígido e (I) o momento de inércia (inércia rotacional) relativo a um eixo paralelo ao centro de massa do pêndulo.

O momento de inércia (I) relativo a um eixo paralelo ao centro de massa é dado por:

$$\mathrm{I} = \mathrm{I_{CM}} + \mathrm{m.L^2}$$

em que I_{CM} é o momento de inércia do sistema relativo a um eixo que passa pelo centro de massa e dependerá da estrutura do corpo de massa (m) (BEER; JOHNSTON JR., 1994).

Da expressão, pode-se concluir que o período (T) do pêndulo aumenta com o aumento da distância (L) e diminui quando (L) é reduzido. É preciso cuidado na análise, pois (L) aparece "escondido" no numerador da expressão (I depende de L) e também no denominador, mas no numerador estará elevado ao quadrado.

O passarinho que sai do relógio

O passarinho, feito de plástico ou de madeira, fica apoiado em um suporte, o qual é articulado e está atrás das portas do relógio. Para que a saída do pássaro case com o som do relógio, o suporte dele também é ligado aos foles e apitos que emitem o som. Quando chega a hora do badalo, o fio de tensão que prende a ave aos foles é liberado e ela sai em sincronia com o barulho do relógio. Na sequência, elas retornam trazendo o pássaro para dentro.

Acertando o relógio

Por conta do sistema todo mecânico, vários fatores podem deixar o cuco marcando as horas com erro até significativo, tanto para mais, quanto para menos. O fator que mais nos interessa agora é a regulagem no pêndulo. Todo pêndulo de relógio cuco tem uma pequena regulagem, para cima ou para baixo, que pode ser ajustada por um parafuso que fica atrás do mesmo. A alteração da posição da massa principal do pêndulo mudará o posicionamento do centro de massa do mesmo (Figura 6).

A razão é que, no verão, devido ao aumento de temperatura, a haste do pêndulo sofre uma pequena dilatação, aumentando de tamanho. Com isso, o período do pêndulo aumenta, ou seja, ele leva mais tempo para completar a oscilação, fazendo com que o ciclo dure mais do que um segundo, atrasando assim o relógio. No inverno, pela pequena contração da haste do pêndulo, ocorre o inverso. Todo ajuste desses relógios é feito à base de testes. Ajusta-se para cima e observa-se se melhorou a precisão dos horários. Caso não, ajusta-se um pouco mais para cima ou um pouco para baixo (PROVIDÊNCIA; DUCOIN, 2010).

Figura 6 – Ajuste do pêndulo

Fonte: o autor.

Finalizando: o pássaro que inspirou Franz Anton Ketterer

O cuco (*Cuculus canorus*) é um pássaro pertencente à ordem Cuculiforme e à família *Cuculidae*. Possui um canto várias vezes repetido, que pode ser ouvido a 1km de distância. Pode alcançar até 34cm de comprimento, 60cm de envergadura e pode ter cerca de 100g de massa. Na cor da plumagem e na forma do voo, o cuco lembra muito o gavião, apresentando cabeça e pescoço cinzentos. As listras transversais na parte inferior do corpo aumentam a semelhança. Observe a Figura 7.

A semelhança com o gavião leva os pardais e outros pequenos pássaros a fugir do ninho quando um cuco se aproxima temendo se tratar de uma ave de rapina. Quando o pequeno pássaro deixa por instantes seu ninho, a fêmea do cuco retira um ovo e coloca um dos seus no lugar. Essa operação leva poucos segundos. Sobre isso, Macedo (2018, p. 35) faz uma consideração interessante:

> Algumas espécies de cuco evoluíram de tal forma que conseguem por ovos de cor e padrão similares aos dos pássaros hospedeiros, reduzindo a probabilidade dos ovos serem abandonados e aumentando as suas chances de sobrevivência. Os pássaros cuco, geralmente, escolhem um ninho onde a ave hospedeira já colocou seus próprios ovos.

Figura 7 – O pássaro-cuco

Fonte: ***Cuculus canorus***. 2019. Modificado. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Common_cuckoo_(Cuculus_canorus)_SRI_32.jpg. Acesso em: 01 mar. 2022.

No hemisfério norte, ele saúda a chegada da primavera, época em que voa para o norte da Europa ou da Ásia à procura de uma companheira. Fora da época do acasalamento, o cuco leva uma vida solitária.

A dieta dos cucos é composta basicamente de pequenos invertebrados, sobretudo insetos; larvas peludas de alguns insetos são um de seus alimentos prediletos. Ocasionalmente alimentam-se de frutos, sementes e até mesmo pequenos répteis ou anfíbios.

Referências

BEER, Ferdinand. P; JOHNSTON JR., E. RUSSELL. **Mecânica Vetorial para Engenheiros**. 5ª ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1994.

MACEDO, M. V. S. **Aplicação de algoritmos de otimização heurística à energia eólica**: determinação dos parâmetros da curva de Weibull para duas regiões brasileiras. 2018. 87 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

PROVIDÊNCIA, C.; DUCOIN, C. Porque é que o relógio de pêndulo atrasa no Verão? **Vamos experimentar**, v. 33, n. 2, p. 33, 2010. Disponível em: https://www.spf.pt/magazines/GFIS/97/article/781/pdf. Acessado em: 03 mar. 2022.

SERWAY, R. A.; JEWETT JR., J. W. **Princípios de Física**: oscilações, ondas e termodinâmica. v. 2. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

VIANA, R. L. Sincronização de relógios de pêndulo e metrônomos: um tratamento qualitativo. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 42, e20200272, 2020. p. 1-10.

Fermentação: um estudo interdisciplinar entre a ciência e a gastronomia

Vera Amaral Pantano[16]

Josias Falararo Pagotto[17]

Introdução

Os métodos de conservação dos alimentos têm como principal objetivo aumentar o tempo de vida útil dos alimentos ou bebidas, através de técnicas que mantenham suas principais características organolépticas, sem deixar de preservar seus nutrientes. De uma forma bem simplificada, podemos dizer que a fermentação nada mais é que uma forma de conservação. Isso se dá por meio das reações obtidas ao submeter um alimento ou bebida a um meio propício para o desenvolvimento de bactérias ou leveduras, resultando em um processo de fermentação e, consequentemente, de conservação.

Também podemos entender a fermentação como uma forma de obtenção de energia por alguns microrganismos, que ocorre na ausência de gás oxigênio. A partir deste processo, é possível reproduzir álcool em bebidas alcoólicas, queijos, iogurtes e seus derivados. Na fermentação alcoólica, é liberado ainda o gás carbônico, utilizado no preparo de massas. Este gás provoca o "crescimento da massa", deixando-a com textura aerada.

A interdisciplinaridade nos permite não só contextualizar este tema, como também apresentar a importância da conexão entre

---

[16] Mestre em Gestão em Alimentos e Bebidas e graduada em Gastronomia. Diretora-proprietária da Wonder Food – culinária saudável, Holambra. *E-mail*: amaralvera@outlook.com.br
[17] Doutor em Ciências. Docente no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – campus Bragança Paulista. *E-mail*: josias.pagotto@ifsp.edu.br

diversas disciplinas para a sua estruturação pedagógica e, ainda, um maior e mais claro entendimento do assunto. Segundo Carlos (2007), uma interdisciplina pressupõe uma organização voluntária e coordenada das ações disciplinares orientadas por um interesse comum. Desta forma, reunimos neste capítulo duas perspectivas aparentemente divergentes, mas complementares entre si: a ciência e a gastronomia.

Relatos históricos de processos fermentativos

Assim como acontece com a maior parte dos dados históricos que apresentam informações sobre os primeiros ingredientes da alimentação humana, não se sabe ao certo qual foi o momento exato em que as fermentações começaram a ser entendidas e aplicadas pelo homem. Porém, a maior parte dos documentos encontrados sugere que foi entre os anos 10.000-7.000 a.C., na Mesopotâmia, quando os primeiros sumérios perceberam acidentalmente as reações causadas ao encontrarem cevada, grão que cresce em abundância naquela região, de molho em água.

Foi nesse período, em uma época de práticas limitadas, que os homens começaram a plantar sua própria comida. O início da agricultura tem uma relação importante com a fermentação, pois tal prática demonstra a necessidade e a curiosidade da espécie humana em transformar o meio em que vivia, de forma a aumentar a capacidade de suporte e recursos para sua própria sobrevivência.

Com o início do plantio, acredita-se que, depois de cultivada e colhida, uma porção de cevada foi deixada em um recipiente que recebeu uma quantidade de água da chuva contingentemente. Ao encontrarem o vasilhame, os homens ali presentes observaram que os grãos haviam germinado e sofrido uma fermentação natural, possível graças ao açúcar existente nos grãos. Este fator fez com que a mistura hospedasse diversas variedades de bactérias e leveduras, surgindo uma bebida alcóolica fermentada.

A cevada não só proporcionou uma bebida nunca antes fabricada, como também foi o primeiro ingrediente a ser utilizado na produção do pão. Naquela época, o pão nada mais era que a mesma mistura utilizada para confeccionar a cerveja, só que "assada" em fogo brando. Desta forma, surgiram dois dos produtos mais valiosos para a história da alimentação, o pão e a cerveja.

Segundo Silva, Leite e Paula (2016), diversos desenhos rupestres e símbolos primitivos dessa época, anteriores à escrita, remetem a registros do que seria a produção de uma bebida fermentada, semelhante à cerveja, sendo utilizada inclusive como moeda de troca. Pode-se observar na Figura 1 uma imagem de um dos primeiros desenhos encontrados representando a cerveja:

Esta imagem nos mostra dois pontos extremamente importantes, a proporção que a bebida rapidamente tomou, se alastrando pelos países do Oriente, mais especificamente pelo Egito Antigo. Há registros de leveduras encontradas em jarras de barros nas tumbas de diversos faraós egípcios, datados de 4.000 a.C. Além disso, destaca-se também a figura da mulher na produção da bebida, uma vez que foram grandes contribuintes para o seu desenvolvimento.

Figura 1 – A cerveja nas primeiras civilizações.

Fonte: https://www.texo.com.br/loja/noticia.php?loja=962610&id=273. Acesso em: 13 mar. 2022.

Alguns historiadores acreditam que, além dos produtos mencionados acima, um dos primeiros ingredientes fermentados consumidos pelo homem sem conhecimento foi o mel, que ao ser submetido a uma forma de fermentação devido ao seu alto nível de glicose, liberou uma substancia alcóolica, se transformando em hidromel.

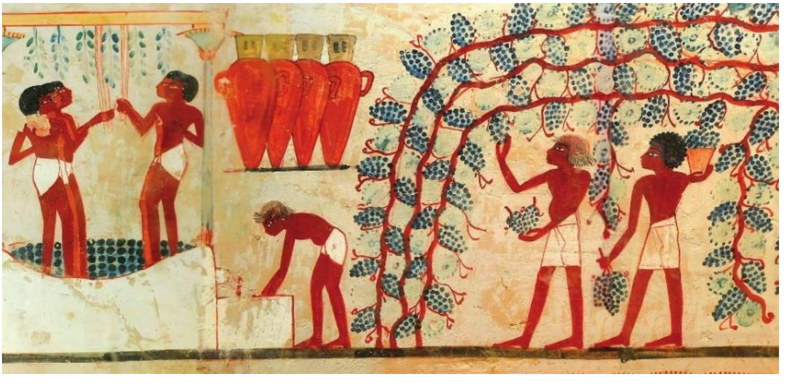
O fato principal e que une todas estas teorias é o surgimento do álcool como a primeira forma de fermentação utilizado intencionalmente pelo homem na história da alimentação, o que proporcionou um importante elemento para a sobrevivência da espécie humana. Segundo Mazoyer e Rourdart (2008), a única fonte de líquidos encontrada até então eram os rios e mares, utilizados para diversas atividades como a caça, banhos, descarte de dejetos, entre outros, impossibilitando o acesso à água que fosse potável.

Depois de começar a entender como os processos de fermentações eram realizados, os homens também passaram a aplicar e experimentar as reações quando submetidas a diversos tipos de insumos. Porém, é importante destacar que os métodos de conservação dos alimentos são datados desde o início da história da civilização humana, quando, mesmo sem conhecimento, sal e fogo eram utilizados não só para o cozimento, como também uma forma para manter os ingredientes frescos por um maior período de tempo. Isso nos faz concluir que a fermentação não é um processo inventado pelo homem, mas um processo biológico presente no mundo desde sempre. A fermentação fez com que o tempo de vida dos humanos aumentasse consideravelmente e, então, os líquidos se tornaram tão importantes, que passaram a ser oferecidos como forma de agradecimento aos deuses. Muitas pessoas acreditavam inclusive que a cerveja teria sido um presente divino para a salvação da espécie humana.

Por volta de 3500 a.C., surge uma bebida alcóolica à base de uva, resultante de um processo natural de fermentação. Acredita-se que foram os Assírios o primeiro povo a realizar a mistura das uvas e a esmagá-las, possibilitando que a água, o açúcar e o fermento natural da fruta entrassem em contato uns com os outros, liberando, por meio do açúcar, álcool e dióxido de carbono. Depois deste processo é possível que estes fabricantes tenham deixado esta mistura na depressão de uma rocha e bebido antes que azedasse, se tornando a bebida que hoje chamamos de vinho (PHILLIPS, 2020).

Na Figura 2, tem-se uma imagem das primeiras práticas de vinificação:

Figura 2 – Práticas de vinificação.



Fonte: https://saporedivino.com.br/home/historia-do-vinho/. Acesso em: 14 mar. 2022.

Com o passar do tempo, o processo de fermentação passou a ser controlado e disseminado entre países da Europa inteira. Segundo Phillips (2020), com este avanço houve um grande aumento no alcance da intervenção do homem no papel da fermentação. As uvas, grãos de cevada e outros ingredientes passaram a ser cultivados e selecionados, passando por processos cada vez mais específicos. O homem deixou de ser apenas um facilitador no processo natural e passa a ser um adaptador, buscando resultados específicos e planejados. Há registros de vasos de vinhos levados ao funeral do rei egípcio Tutancâmon (1339 a.C.), com ânforas que continham desde o local de fabricação, data, lote da safra, até o nome do produtor (FONSECA; JANÉ; IBRAHIM, 2012).

É preciso também reconhecer o papel dos gregos como um dos grandes responsáveis pela disseminação das práticas de fermentação, não só na produção das bebidas, como também na fabricação de ânforas extremamente resistentes, o que permitiu que diversos tipos de bebidas e comidas fossem conservados de tal forma que aguentavam longas viagens, chegando até outros continentes.

É no século XIX que surge o maior escritor sobre uma vasta teoria sobre fermentações, Louís Pasteur. Foi este autor que estudou pela primeira vez não só as ações das fermentações, mas também como acontecia cientificamente a disseminação das bactérias, ou seja, a microbiologia. É Pasteur quem recebeu o crédito por ter descoberto que as doenças de fermentação etanólica foram causadas por microrganismos que entraram em concorrência com a levedura (BORDENAVE, 2003).

Foi este o estudo mais importante para a profissionalização e também industrialização dos fermentos. Pasteur estudou a diferenciação na ação de cada tipo de fermento quando aplicados a diferentes ingredientes e se concentrou em afirmar, pela primeira vez, que os líquidos fermentantes eram opticamente ativos e se a fermentação resultava em produtos ativos. Para ele, havia a ação de organismos vivos no processo (RODRIGUES, 2014).

Em 1860, em um artigo intitulado *Mémoire sur la fermentation appelée alcoolique*, Pasteur estudou especificamente os princípios da fermentação alcóolica. Para o autor, a fermentação alcóolica era resultado da fermentação do açúcar sob a ação do fermento que leva o nome de levedura de cerveja, sendo esta a fermentação da qual resulta o vinho e todas as bebidas alcóolicas.

Já em 1861, Pasteur publica o trabalho “Sur les ferments”, observando o modo de crescimento e dissipação quando um fermento age em contato com o gás carbônico ou com o gás oxigênio do ar, estabelecendo mais uma vez a concepção que a fermentação era um processo biológico, relacionado a atividade de organismos vivos.

Segundo Rodrigues (2014), foi a partir desses estudos que Pasteur passou também a considerar que, da mesma forma que os microrganismos poderiam alterar os compostos fermentáveis, seria possível que pudessem alterar outro ser vivo, sendo responsável pelo processo de putrefação e até mesmo a causa de doenças nas matérias orgânicas e/ou vivas.

No próximo tópico, discutiremos como são separados estes tipos de fermentação na produção e na conservação dos alimentos.

Tipos de fermentação na produção de alimentos – a fermentação na gastronomia

Existem diversos tipos de fermentação. Porém, na alimentação e na produção de bebidas, a reação da fermentação resulta em três principais rejeitos: ácidos orgânicos, álcool e gás carbônico. Assim, de forma simplificada, podemos separar os alimentos e suas reações dentro de três grupos: a fermentação alcóolica, a acética e a lática, as quais apresentamos a seguir.

Fermentação alcóolica

Segundo Alves (1994), o objetivo primário que induz todos os organismos a metabolizarem os carboidratos é, via de regra, a máxima produção de energia no catabolismo oxidativo, a formação de estruturas celulares e a estocagem de reservas para utilização posterior. No caso da fermentação alcóolica, este processo ocorre em algumas bactérias e leveduras, sendo a *Saccharomyces Cerevisiae* a levedura mais comum de ser encontrada nas bebidas alcóolicas.

Neste processo biológico, a sacarose é o principal substrato empregado na indústria brasileira. Ela é absorvida na forma de seus monossacarídeos estruturais, glicose e frutose e assim induz a fabricação de enzimas alcóolicas e dióxido de carbono, favorecendo a fermentação (ALVES, 1994). Como este processo não demanda a presença de oxigênio, é considerado um processo anaeróbico, ocorrendo principalmente nas produções de pães, vinhos, sidras, cervejas e *kombuchas*.

Fermentação acética

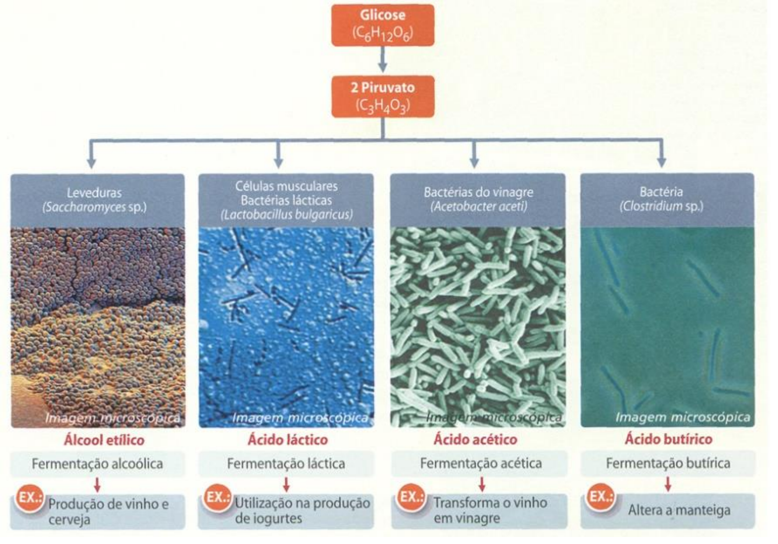
Segundo Whiting (1973), o ácido acético é o principal ácido volátil produzido durante a fermentação. De forma reduzida, este tipo de fermentação é produzido quando bactérias acéticas entram em contato com o etanol produzido na etapa da fermentação alcóolica. O acetato, em contato com o ar, produz uma oxidação no etanol, desequilibrando a fermentação alcóolica. Estas bactérias são aeróbicas, o que dificulta seu uso no processo industrial.

O ingrediente mais usual extraído da fermentação acética são os vinagres, que nada mais são do que vinhos oxidados, devido ao contato com o oxigênio, resultando em um “véu” na superfície do recipiente. Estas transformações nos alimentos são os principais interesses que as fermentações acéticas constituem para o histórico da fermentação, sendo utilizadas para produção e para diversos testes na indústria fermentácea.

Fermentação lática

As fermentações láticas geralmente são desenvolvidas através de duas principais variantes, as bactérias do gênero *Lactobacillus* ou as leveduras *Lanchancea Fermentati*. Segundo Ivanov (2011), na fermentação lática a glicose sofre inicialmente um processo de quebra, através de uma sequência de reações catalisadas por enzimas, denominado glicólise. Este processo é exatamente igual ao ocorrido na fermentação alcoólica. Entretanto, na fermentação lática o aceptor final de hidrogênios é o próprio ácido pirúvico, que é convertido em ácido lático.

Figura 3 –Tipos de fermentação e suas reações



Fonte: https://essaseoutras.com.br/fermentacao-alcoolica-latica-e-acetica-tipos-de-respiracao-anaerobia/. Acesso em: 14 mar. 2022.

Um dos grandes benefícios industriais das técnicas de fermentação lática corresponde ao aumento da validade dos produtos. Como exemplo, pode ser citada a produção de chucrute a partir do repolho, além de picles, azeitonas e produtos cárneos maturados (IVANOV, 2011).

Na Figura 3 tem-se um exemplo das formas de fermentação mais encontradas nos alimentos.

A bioquímica por trás dos processos fermentativos

A fermentação biológica é um processo que possui certa complexidade por se tratar de uma forma de obtenção de energia de alguns microrganismos que ocorre na ausência do gás oxigênio. Em geral, grande parte dos organismos vivos obtém energia a partir da conversão da energia química contida nos alimentos (que fica armazenada na forma de ligações químicas) em ATP, a qual é utilizada para as suas atividades metabólicas. Este processo, que ocorre na presença de gás oxigênio (aeróbico), é chamado de respiração celular (VOLPE, 1997).

Contudo, alguns organismos são adaptados para obter energia sem utilizar gás oxigênio (processo anaeróbico); este processo é o que chamamos de fermentação. Os organismos mais comuns que realizam fermentação são bactérias e fungos, além de alguns moluscos e anelídeos.

Os animais vertebrados também podem, em certas condições, fazer fermentação para produção de energia. É o caso das células musculares que, em situações de grande esforço físico e respiração inadequada, com consequente falta de gás oxigênio na corrente sanguínea, também podem produzir energia de forma anaeróbica. O processo aeróbio, contudo, possui maior rendimento energético do que o processo anaeróbio. Partindo de uma molécula de glicose, o rendimento energético a partir da respiração é de cerca de trinta ATPs, enquanto no processo de fermentação são gerados somente dois ATPs (VOLPE, 1997).

Para melhor entender o processo de fermentação, é preciso inicialmente saber como ocorre a respiração celular, para que as respectivas diferenças possam ser estabelecidas e entendidas.

O processo de respiração é uma forma de obter energia, com consumo de gás oxigênio. Uma das principais fontes de energia são os carboidratos simples, como a glicose e a frutose (ambas com fórmula $C_6H_{12}O_6$). De acordo com MOREIRA (2013), a respiração ocorre em 3 etapas: a glicólise, o ciclo de Krebs e a fosforilação oxidativa. De forma resumida, a glicólise ocorre no citoplasma da célula, sem a necessidade de O_2. Duas moléculas de ATP fornecem dois grupos fosfatos à molécula de glicose, que se quebra em duas moléculas de ácido pirúvico (também chamado de piruvato). Embora este processo consuma duas moléculas de ATP, no final são formadas quatro destas moléculas, restando, portanto, um saldo positivo de duas moléculas de ATP. O ciclo de Krebs (também chamado ciclo do Ácido Cítrico ou Ciclo do Ácido Tricarboxílico) ocorre na mitocôndria, na presença de O_2. Após algumas reações químicas catalisadas por enzimas, ocorre liberação de gás carbônico (CO_2). Por fim, a última etapa da respiração celular é a fosforilação oxidativa, que ocorre a partir de uma sucessão de reações impulsionadas por transporte de elétrons, com formação de H_2O e grande quantidade de moléculas de ATP. De uma forma bem simplificada, o processo de respiração pode ser equacionado da seguinte maneira (VOLPE, 1997):

$$C_6H_{12}O_6 + 6O_2 \rightarrow 6CO_2 + 6H_2O + 36\ ATP$$

A fermentação ocorre no citoplasma da célula, na presença de enzimas (catalisadores biológicos) e envolve menos etapas que a respiração. A primeira etapa, assim como na respiração, é a glicólise, quando duas moléculas de piruvato são produzidas. Ao final, o piruvato é convertido em lactato ou etanol, com liberação de gás carbônico, e um saldo de somente duas moléculas de ATP (MOREIRA, 2013).

Uma vantagem em se utilizar a fermentação para preparo de alimentos, é que a ela ocorre com uma velocidade maior que a respiração, liberando assim o CO_2 mais rapidamente, fazendo com que a massa cresça em um curto intervalo de tempo (SILVA, 2020). Os diferentes tipos de fermentação produzem diferentes substâncias como produto, mesmo partindo do mesmo carboidrato (a glicose, por exemplo - $C_6H_{12}O_6$). Na fermentação alcoólica é produzido etanol (C_2H_5OH) e gás carbônico (CO_2):

$$C_6H_{12}O_6 \rightarrow 2\ C_2H_5OH + 2\ CO_2 + 2\ ATP$$

Na fermentação lática, ao final do processo é formado ácido lático ($C_3H_6O_3$) como produto, que é o responsável pelo azedamento do leite e a coagulação das suas proteínas, formando o coalho, matéria-prima para a fabricação de iogurtes e queijos (OLIVEIRA *et al*, 2021), conforme a equação a seguir:

$$C_6H_{12}O_6 \rightarrow 2\ C_3H_6O_3 + 2\ ATP$$

Nos músculos, sob intensa atividade física, a quantidade de oxigênio na corrente sanguínea pode ser insuficiente para a demanda de energia. Neste caso, o músculo realiza fermentação ao mesmo tempo que faz a respiração, para obter quantidade extra de energia, produzindo, ao final, ácido lático. A desvantagem é que o ácido lático produzido como subproduto causa dores e câimbras.

Por fim, a oxidação acética ocorre com a conversão de etanol em ácido acético ($H_4C_2O_2$) na presença de oxigênio. O produto final será ácido acético, usado na composição do vinagre.

$$C_2H_5OH + O_2 \rightarrow H_4C_2O_2 + 2\ H_2O$$

Fermentação e Ciências

O processo de fermentação é um tema bastante rico para ser explorado em sala de aula, com alunos do Ensino Fundamental e Médio. É um tema interdisciplinar que está muito presente na gastronomia, permeando também disciplinas como Química, Biologia, Física e Matemática.

A fermentação biológica, no que se refere ao seu mecanismo, pode ser explicada utilizando-se conceitos das disciplinas de Biologia e Química (por ser um processo bioquímico). Além da rica parte teórica, pode-se utilizar este tema para diversos experimentos práticos, em laboratório de ciências. A vantagem é que se pode utilizar reagentes baratos e de fácil aquisição, como fermento biológico fresco ou seco, vinagre, açúcar, sal, farinha, produtos que comumente estão presentes nas casas ou são facilmente encontrados em supermercados.

A fermentação biológica pode ser demonstrada em laboratório utilizando tanto a fermentação alcoólica como a fermentação lática. Neste ínterim, as reações químicas de cada processo podem ser exploradas com os alunos, bem como os grupamentos orgânicos que caracterizam um carboidrato, álcool (etílico) e ácido (lático ou acético). Ainda, a evolução de um gás, no caso da fermentação alcoólica, é um sinal claro da ocorrência de uma reação química. O processo de fermentação é iniciado pela mistura da levedura ("fermento") com um carboidrato (sacarose e/ou amido da farinha de trigo) com um líquido (água ou leite) em temperatura de cerca de 37ºC ("água morna"). A massa deve descansar por um tempo, para que o processo de fermentação ocorra, e haja a liberação do gás carbônico. No cozimento, os microrganismos morrem, cessando assim a liberação de CO_2, e a massa adquire a textura aerada (SILVA; FRÍSCIO, 2021).

A taxa de liberação de CO_2 na fermentação pode ser medida com alguns experimentos. Um desses experimentos pode ser feito dissolvendo-se o gás carbônico liberado em uma solução aquosa de hidróxido de cálcio. Uma vez estimada, o perfil desta taxa pode ser analisado se equivale a um crescimento linear ou exponencial (conceitos importantes da Matemática). Alternativamente, o CO_2 liberado pode ser coletado em bexigas, e a relação entre quantidade produzida, volume e pressão, conceitos importantes da Física, podem ser explorados. (FERREIRA; MONTES, 1999).

Além disso, o processo de fermentação biológica pode ser explorado na disciplina de Biologia, comparando-o com o processo de respiração celular, considerando as respectivas diferenças entre cada processo. A temperatura também é uma variável que pode ser explorada na ocorrência de processos bioquímicos (ESCUDEIRO *et al*, 2018)

Considerações finais

A fermentação, processo bioquímico essencial para a gastronomia, ocorre pela ação anaeróbia de fungos e de bactérias, para obtenção de energia. Como subproduto deste processo, pode ser liberado o gás carbônico (fermentação alcoólica), que pode ser utilizado para o preparo de massas (etapa de crescimento), pães, iogurtes e outros. Por outro lado, os demais produtos da fermentação também são de grande interesse para a gastronomia e como combustíveis, por exemplo, como o etanol (responsável pela produção de bebidas alcoólicas como o vinho e destilados) e o ácido lático, que forma o coalho (usado na fabricação de queijos e vinhos).

Com esta riqueza de processos que este tema oferece, é oportuna sua utilização em sala de aula. O conteúdo pode ser enriquecido com exemplos contextualizados ao cotidiano dos estudantes por meio de experimentos simples e de baixo custo, que ilustram a ocorrência dos processos fermentativos e os ajudam a entender conceitos teóricos que, às vezes, parecem abstratos.

Disciplinas como Química, Biologia, Física e Matemática podem se beneficiar dos diversos conceitos que esta temática nos traz, utilizando-se, inclusive, da experimentação, que é um importante recurso e alternativa à aula teórica e/ou expositiva. Portanto, trata-se de um tema multidisciplinar, que permite a integração de diferentes disciplinas e beneficia diretamente o aprendizado do aluno.

Referências

ALVES, D. M. G. **Fatores que afetam a formação de ácidos orgânicos bem como outros parâmetros da fermentação alcoólica**. 1994. 287f. Dissertação (Mestrado em Ciências). Universidade de São Paulo, Piracicaba, 1994.

BORDENAVE, G. Louis Pasteur (1822–1895). **Microbes and infection**, v. 5, n. 6, p. 553-560, 2003.

CARLOS, J. G. **Interdisciplinaridade no Ensino Médio**: desafios e potencialidades. 2007. 172 f. Dissertação (Mestrado em Ciências), Universidade de Brasília, Brasília, 2007.

ESCUDEIRO, M. C.; FRANCHI, I. L.; ALMEIDA, C. S.; RIBEIRO, I. S. Conhecendo o processo de fermentação: fungos unicelulares (Saccharomyces cerevisiae). *In*: 10ª JORNADA CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA DO IF SUL DE MINAS, 2018, Muzambinho. **Anais da 10ª Jornada Científica e Tecnológica.** Muzambinho, IFSuldeminas, 2018.

FERREIRA, E. C.; MONTES, R. A química da produção de bebidas alcoólicas. **Química Nova na Escola**, São Paulo, SP, n. 10, p. 50-51, 1999.

FONSECA, S.; JANÉ, M. R. G.; IBRAHIM, M. O vinho no Antigo Egito: uma história mediterrânea. **Mundo Antigo**, v. 1, n. 1, p. 139-55, 2012.

IVANOV, R. C. **Fermentação acética:** abordando transformações químicas e bioquímicas. 2011, 44f. (Monografia). Licenciatura em Química, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2011.

MAZOYER, M.; ROUDART, L. **História das agriculturas no mundo**: do neolítico à crise contemporânea. São Paulo: UNESP, 2008.

MOREIRA, C. Respiração. **Revista de Ciência Elementar**, Lisboa, Portugal, v. 1, n. 1, p. 1-5, 2013.

OLIVEIRA, C. M.; GOMES, B. O.; ARAUJO, B. C.; FONTENELE, M. A.; FREITAS, A. C. Avaliação do teor de lactose no processo fermentativo do soro de queijo por *Lactobacillus Acidophilus* e *Lactococcus Lactis*. *In*: SCAGLIONI, P.T. (org.) **Ensino e pesquisa no campo da Engenharia e da Tecnologia de Alimentos.** Ponta Grossa: Atena, 2021, p. 29-36

PHILLIPS, R. **Uma breve história do vinho**. Rio de Janeiro: Record, 2020.

RODRIGUES, S. P. **O microrganismo no trabalho de Pasteur**: estudos sobre a fermentação e a putrefação. 2014. 108 f. Tese (Doutorado em História da Ciência). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

SILVA, A; FRÍSCIO, F. A química do pão de fermentação natural e as transformações na nossa relação com o preparo desse alimento. **Química Nova na Escola**, São Paulo, SP, v. 43, n. 3, p. 232-243, 2021.

SILVA, H. A.; LEITE, M. A.; PAULA, A. de. Cerveja e sociedade. **Contextos da Alimentação – Revista de Comportamento, Cultura e Sociedade**, v. 4, n. 2, 2016.

VOLPE, P. L. O. Estudo da fermentação alcoólica de soluções diluídas de diferentes açúcares utilizando microcalorimetria de fluxo. **Química Nova,** Campinas, SP, v. 20, n. 5, p. 528-534, 1997.

WHITING, G.C. Acetification in ciders an perries. **Journal of the Institute of Brewing**. London, 79: 218-26, 1973.

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo
Câmpus
Bragança Paulista

Autores:

Apolo Rubens de Camargo

Bruno Pavani Azevedo

Cláudio Sérgio Sartori

Irval Cardoso de Faria

Josias Falararo Pagotto

Lucilene Cândido Rocha

Rafael de Almeida Serra Dias

Roberto de Andrade Martins

Rodrigo Rafael Gomes

Rubens Pantano Filho

Vera Amaral Pantano

Wellington Pereira das Virgens

FoxTablet

ISBN 978-65-89010-51-7

9 786589 010517